УДК 517.94(075.8)
ББК 22.143
М67

Рецензенты: *В.И. Сивцов, В.А. Уткин*

Митришкин Ю.В.

М67 Линейные модели управляемых динамических систем: Учеб. пособие: В 2 ч. — Ч. 1: Уравнения «вход — выход» и «вход — состояние — выход». — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. — 222 с.: ил.

ISBN 978-5-7038-3142-7

Рассмотрены линейные модели управляемых динамических систем в непрерывном времени с сосредоточенными параметрами, представляемые в переменных «вход — выход» и в пространстве состояний: «вход — состояние — выход». Приведены сведения, необходимые для понимания математического описания линейных моделей систем, из разделов функционального анализа и обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрены линейные скалярные SISO-модели (Single-Input-Single-Output: один вход — один выход) и многомерные MIMO-модели (Multi-Inputs-Multi-Outputs: много входов — много выходов). Представлены простейшие численные примеры, иллюстрирующие линейные модели динамических систем. Приведена программа на языке MATLAB (MATrix LABoratory: матричная лаборатория) для получения временных и частотных характеристик динамических систем. Представлены результаты исследования с ее помощью моделей некоторых элементарных динамических звеньев.

Для студентов III – VI курсов МГТУ им. Н.Э. Баумана, изучающих основы автоматического управления. Настоящее пособие также может быть полезно аспирантам, преподавателям и специалистам, применяющим теорию управления на практике.

УДК 517.94(075.8)
ББК 22.143

ISBN 978-5-7038-3142-7

СПИСОК ПРИНЯТЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

◄ — начало доказательства или рассуждения
► — конец доказательства или рассуждения
■ — конец примера
$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ — действительная (вещественная) прямая: множество действительных чисел
$\mathbb{R}^{+}$ — множество положительных действительных чисел
$\mathbb{R}^{n}$ — n-мерное евклидово пространство
$x = [x_1, \ldots, x_n]$ — вектор, x_i — его координаты
$s = x + jy$ — комплексное число, $s = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$ — его тригонометрическая запись
$\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел (плоскость комплексного переменного s)
$\operatorname{Re} s, \operatorname{Im} s$ — вещественная и мнимая части комплексного числа $s \in \mathbb{C}, s = \operatorname{Re} s + j \operatorname{Im} s$
$j = \sqrt{-1}$ — мнимая единица, $j^2 = -1$
$|s|$ и $\arg s$ — модуль и аргумент комплексного числа $s \in \mathbb{C}$
$\sup\limits_{\{x\}} f(x)$ — точная верхняя грань функции $f(x)$ на множестве $\{x\}$, sup — первые три буквы латинского слова supremum («супремум»), которое переводится как «наивысшее»
$\inf\limits_{\{x\}} f(x)$ — точная нижняя грань функции $f(x)$ на множестве $\{x\}$, inf — первые три буквы латинского слова infinum («инфинум»), которое переводится как «наинизшее»
I — единичная матрица
$A^{\text{т}}$ — транспонирование матрицы $A = \{(a_{ij})\}: \quad A^{\text{т}} = \{(a_{ji})\}$
$\operatorname{rk} A$ — ранг матрицы A

$\lambda_i(A)$ — собственное значение матрицы A

$\mathrm{tr}\,A$ — след матрицы A (сумма диагональных элементов).

$\det A$ — определитель матрицы A

$\mathrm{Adj}\,A$ — присоединенная матрица

$\rho(A)$ — спектральный радиус матрицы A: $\rho(A) = \max\limits_i |\lambda_i(A)|$

$\|\bullet\|$ — норма вектора, матрицы или линейного оператора

$\dfrac{df(x)}{dx}$ — производная (скорость изменения) функции $f(x)$ в точке x, эквивалентное обозначение $f'(x)$; для производной по времени вместо $f'(x)$ также используется $\dot{f}$

A_x — производная Фреше отображения f в точке x

$\dfrac{\partial u(x)}{\partial x}$ — частная производная функции u по переменной x. Если u и x — векторы, то $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ — матрица Якоби, если u — скаляр, а x — вектор, то $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ — градиент

$\nabla f(x)$ — градиент функции $f(x) \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, т. е. вектор $\left[\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right]$

Σ — сумма

$\int$ — неопределенный интеграл

$\int\limits_a^b$ — определенный интеграл, где a и b — нижний и верхний пределы интегрирования

$\int\limits_0^\infty$ — несобственный интеграл по бесконечному промежутку с нулевым нижним пределом интегрирования

D_A — область определения оператора A

R_A — область значений оператора A

$\operatorname{Ker} A$ — нуль-пространство (ядро) оператора A
$R(\lambda)$ — резольвентный оператор (резольвента)
$A \Rightarrow B$ — из A следует B
$\Leftrightarrow$ — тогда и только тогда
$\forall$ — для любого
$x \in X$ — x принадлежит X
$\dim X$ — размерность линейного пространства X
$\operatorname{Res}\left[f(z), a\right]$ — вычет функции комплексного переменного $f(z)$ в точке a
$(f * g)$ — свертка функций $f(t)$ и $g(t)$
$t \in \mathbb{R}$ — время
$u(t) \in \mathbb{R}^m$ — входной сигнал системы
$y(t) \in \mathbb{R}^l$ — выходной сигнал системы
$x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние модели системы
$\delta(t)$ — импульсная функция (функция Дирака, δ-функция)
$1(t)$ — ступенчатая функция (функция Хевисайда)
$h(t)$ — переходная функция
$w(t)$ — весовая функция (импульсная переходная функция)
$p = \dfrac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования
$D(p)$ — собственный оператор системы (полином от p)
$K(p)$ — оператор воздействия системы (полином от p)
$W(p) = \dfrac{K(p)}{D(p)}$ — скалярная операторная передаточная функция
$W(s) = \dfrac{K(s)}{D(s)}$ — скалярная комплексная передаточная функция
$D(s)$ — характеристический полином системы
$W(j\omega)$ — частотная передаточная функция, амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ), диаграмма (годограф) Найквиста
$A(\omega) = \left|W(j\omega)\right|$ — амплитудно-частотная характеристика (функция) — АЧХ

$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$ — фазовая частотная характеристика (функция) — ФЧХ

$U(\omega) = \operatorname{Re} W(j\omega)$ — вещественная частотная характеристика (функция)

$V(\omega) = \operatorname{Im} W(j\omega)$ – мнимая частотная характеристика (функция)

$L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$ — логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ)

$X(t)$ — фундаментальная матрица решений линейного однородного дифференциального уравнения $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, $x(0) = x_0$

$\Phi(t, t_0)$ — переходная матрица состояния (матрица перехода, переходная матрица)

e^{At} — матричная экспонента

$x_n \to x_0$ — последовательность x_n стремится к пределу x_0, т. е. $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

$\sigma(A)$ — спектр линейного оператора A

ПРЕДИСЛОВИЕ

Начало разработки любой системы автоматического управления, как правило, связано с математическим описанием модели управляемого объекта. При этом задаются вопросом: *какими математическими моделями может представляться управляемый объект*, под которым понимается управляемая динамическая система?

Часть 1 данного учебного пособия посвящена ответу на этот вопрос с привлечением в необходимой степени математического аппарата, который позволяет объяснить происхождение базовых понятий в представлении динамических моделей систем. В этой части учебного пособия рассмотрены уравнения линейных моделей в переменных «вход — выход», отражающие взаимосвязь между входными и выходными сигналами системы (внешние модели) и в пространстве состояний, т. е. уравнения линейных моделей типа «вход — состояние — выход» (внутренние модели), описывающие взаимосвязи между переменными состояния системы. Уделено внимание как скалярным SISO-моделям, так и многомерным MIMO-моделям в обоих представлениях.

Прежде всего важно обратиться к общему понятию системы. *Система* (от гр. *systēma* — целое, составленное из частей; соединение) — *это множество элементов, находящихся в отношениях и связях друг с другом, которое образует определенную целостность, единство* [1]. *Динамическая система* — это система, которая описывается дифференциальными уравнениями. Если система управляема, то она подвержена управляющим воздействиям, назначением которых является достижение цели управления при действии на систему различного вида возмущений и наличии неопределенностей.

Все динамические системы в природе являются *нелинейными* и имеют *распределенные параметры*, т. е. описываются нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных. Получение решений таких уравнений и понимание поведения динамических систем представляет серьезную проблему, в частности при решении задач автоматического управления.

Следует обратить внимание, что международное сообщество по автоматическому управлению ставит анализ и синтез нелинейных систем в настоящее время на первое место. Об этом можно судить по наибольшему употреблению термина «нелинейные системы» (англ. *Nonlinear Systems*) в представленных докладах по сравнению со всеми другими ключевыми терминами на ежегодной Международной конференции по принятию решений и управлению CDC 2006 (англ. *Conference on Decision and Control*) [2], которая имеет наиболее высокий статус в мире по теории управления. Второе место в статистике употребления ключевых терминов на CDC 2006 занимают «линейные системы» (англ. *Linear Systems*). Это связано с тем, что на начальной фазе изучения управляемых динамических систем их стремятся описать обыкновенными дифференциальными уравнениями и линеаризировать, если это возможно, относительно рабочих режимов (траекторий), т. е. перейти к линейным моделям управляемых динамических систем с сосредоточенными параметрами.

Исследование и понимание линейных моделей является более простой задачей, но управление многосвязными динамическими MIMO-системами высокой размерности может представлять достаточно сложную проблему [3, 4]. Решение этой проблемы обеспечивает во многих случаях понимание природы исходных нелинейных динамических моделей, их основные свойства и закономерности вблизи рабочих траекторий.

Линейные модели позволяют синтезировать регуляторы обратной связи, которые в замкнутых системах дают возможность удерживать управляемые процессы на рабочих траекториях как для устойчивых, так и для неустойчивых объектов.

По этой причине весьма желательно при изучении теории систем управления разобраться вначале в основных аспектах линейных моделей управляемых систем с постоянными параметрами.

Это важно прежде всего для студентов, изучающих дисциплину «Управление в технических системах», которым необходимые сведения из соответствующих разделов математики[1] уместно напомнить в связи с их применением в теории линейных управляемых систем. Более того, некоторые разделы математики, полезные для изучения линейных систем, как правило, не освещаются в учебных курсах математики технических вузов, например, линейные операторы в линейных нормированных пространствах, дифференцирование нелинейных операторов (производная Фреше), обобщенные функции и т. п. Поэтому в главе 1 пособия рассматриваются элементы функционального анализа, что восполняет в некоторой степени указанные пробелы и может способствовать пониманию курса линейных систем управления, в частности, математически корректных предельных переходов при использовании δ-функций, применении производной Фреше для линеаризации нелинейных уравнений [6], теоремы об ограниченности спектрального радиуса линейного оператора его нормой в задаче размещения корней характеристического полинома замкнутой линейной системы управления, использовании редукции линейных моделей [6], основ теории H_∞ систем управления [6, 7] и т. п.

В части 2 учебного пособия автор предполагает рассмотреть пять разделов линейных моделей управляемых динамических систем: управляемость, наблюдаемость, устойчивость, редукция и идентификация.

Идея редукции сводится к замене модели объекта высокой размерности моделью объекта низкой размерности таким образом, чтобы такая аппроксимация была достаточно точной, а регулятор, спроектированный для модели объекта низкой размерности, работал бы удовлетворительно и на модели высокой размерности.

Основной подход современной теории редукции линейных моделей основан на внутреннем балансировании (A, B, C, D)-реализации линейной модели объекта, которая сводится к нахождению линейного невырожденного преобразования координат, приводящего грамианы управляемости и наблюдаемости минимальной реализации системы к одной и той же диагональной

---

[1] Математика (от гр. *mathēmatikḗ*, от *ma'thēma* — знание, наука) — наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира (Большая советская энциклопедия. М., 1974. Т. 15. С. 467).

матрице. Положительные числа, стоящие на главной диагонали этой матрицы, называются ганкелевыми сингулярными числами. Эти числа являются индикаторами степени влияния входного воздействия на каждую управляемую моду модели и степени проявления на выходе системы этой же моды в найденном базисе пространства состояний.

Все разделы части 2 пособия будут взаимосвязаны между собой, так как грамианы управляемости и наблюдаемости являются решениями соответствующих матричных уравнений Ляпунова, полученных для линейных систем. На CDC 2006 один из пленарных докладов проф. А. Кренера (A. Krener) был посвящен редукции динамических систем [2]. Этот факт подчеркивает особую значимость редукции как раздела современной теории управления в проектировании систем автоматического управления объектами высокой размерности [6].

В учебном пособии рассматриваются линейные модели динамических систем с постоянными параметрами в непрерывном времени.

Представление динамических систем в дискретном времени является отдельной задачей и основывается не на дифференциальных уравнениях, а на разностных уравнениях, решение и исследование которых имеет свою специфику.

В пособии приводится ряд примеров. Часть примеров иллюстрирует используемые математические понятия, а часть — дает аналитическое и численное решения простых постановок задач без применения какой-либо вычислительной техники. Приведенные примеры показывают приложение рассматриваемой теории к простейшим задачам по исследованию моделей динамических систем. Более сложные задачи целесообразно решать с применением специализированного пакета прикладных программ MATLAB и графического инструментария SIMULINK в среде MATLAB. Простейшая программа для получения временных и частотных характеристик линейных динамических моделей также приведена в пособии и использована для иллюстрации поведения колебательного звена и аппроксимации звена транспортного запаздывания линейными моделями.

Идея написания учебного пособия, посвященного линейным моделям управляемых динамических систем, навеяна автору работой по проектированию систем автоматического управления плазмой в магнитном поле термоядерных установок [3 – 5, 7]. Плазма как объект с распределенными параметрами описывается сложными системами нелинейных дифференциальных уравнений, что при синтезе регуляторов требует выполнения процедур идентификации и линеаризации, приводящих к линейным моделям высокой размерности. Исследование свойств этих моделей и их редукция вызывают повышенный интерес к теории и пониманию линейных моделей управляемых динамических систем.

При написании учебного пособия был использован ряд литературных источников, как отечественных, так и зарубежных, что нашло отражение в «Списке литературы». Подбор литературы и ее использование осуществлялись в основном по принципу наиболее понятного изложения вопросов, затронутых в пособии. По предмету линейных моделей управляемых динамических систем имеется огромное количество учебников, монографий и статей. В этой связи практически невозможно сделать полный обзор по этой тематике с учетом того, что почти в каждой книге по теории управления есть раздел по линейным моделям. Поэтому автор не претендует на полноту «Списка литературы», который во многом определялся личным предпочтением[2].

Следует обратить внимание на то, что в параграфах пособия «Термины», с которых начинается каждая глава, представлены списки ключевых терминов с кратким объяснением их смысла. Термины приведены в порядке изложения материала соответствующей главы, что позволяет с самого начала и на всем протяжении изложения представлять всю ее структуру. Постоянное обращение к списку терминов дает возможность читателю вдумываться в значения терминов, понимание которых необходимо для глубокого восприятия содержания всего материала учебного пособия.

После каждой главы учебного пособия приведены «Выводы», в которых кратко сформулированы основные положения главы и представлены наиболее важные формулы.

Выводы совместно со списками терминов должны способствовать более полному усвоению читателем содержания пособия, а

---

[2] De qustibus non est disputandum — О вкусах не спорят (лат. поговорка) (Бабичев Н.Т., Боровской Я.М. Словарь латинских крылатых слов. М., 1988. С. 165).

также быстрому восстановлению в памяти и удобному повторению изученного материала.

Приведенные в Приложении 1 таблицы теорем операционного исчисления и соответствий между оригиналами и их изображениями по Лапласу рекомендуется выучить наизусть, поскольку они доказаны и выведены в пособии.

Для представления всей исторической картины результатов, полученных трудами известных ученых и примененных в учебном пособии, в Приложении 2 приведена краткая историческая справка. Она содержит имена ученых, их годы жизни, область деятельности и научные факты, которые использованы в пособии. Биографические данные о жизни известных ученых, а также сведения об их научных достижениях можно найти в энциклопедии Интернета: ВИКИПЕДИЯ (http://ru.wikipedia.org) и WIKIPEDIA (http://en.wikipedia.org).

Автор выражает благодарность за высококвалифицированную работу редактору Издательства МГТУ им. Н.Э. Баумана Королевой Ольге Макаровне и редактору Серебряковой Светлане Анатольевне, осуществившей компьютерную верстку.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

1.1. Термины

Оператор (отображение, функция) — соответствие между множествами (пространствами), заданное по определенному правилу.

Метрика (функция расстояния) — оператор (функционал), ставящий в соответствие двум любым элементам множества неотрицательное вещественное число, которое называется *расстоянием* между этими элементами. Метрика удовлетворяет аксиомам симметрии и треугольника, при этом метрика равна нулю тогда и только тогда, когда элементы множества равны между собой.

Норма — оператор (функционал), ставящий в соответствие каждому элементу множества неотрицательное вещественное число. Норма удовлетворяет аксиомам однородности и треугольника. При этом норма равна нулю тогда и только тогда, когда сам элемент векторного пространства равен нулю.

Пространство — множество, между элементами которого установлены определенные соотношения. Если такое множество состоит из функций, то говорят о функциональном пространстве.

Матрица — прямоугольная таблица из элементов некоторого множества.

Производная Фреше — линейный непрерывный оператор главной части приращения дифференцируемого оператора, линейно зависящая от приращения аргумента.

Интеграл Римана — предел суммы произведений длин отрезков разбиения промежутка числовой оси на значения функции в произвольных точках этих отрезков при стремлении количества отрезков разбиения к бесконечности.

Сжимающее отображение — уменьшает расстояние между любыми двумя отображаемыми элементами метрического пространства, т. е. дает расстояние между двумя образами строго меньше расстояния между прообразами.

Обобщенная функция — линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций (финитных и бесконечно дифференцируемых).

1.2. Роль функционального анализа в теории управляемых систем

При рассмотрении управляемых систем в современной специальной литературе во многом используется аппарат функционального анализа. В нем понятия сигналов и систем связаны с понятиями функциональных пространств и операторов. Поэтому удобно вначале обсудить общие понятия, которыми оперируют в функциональном анализе применительно к теории управляемых систем, а затем рассмотреть, как они используются при изучении конкретных вопросов динамики моделей управляемых систем. Такой подход может значительно облегчить дальнейшее восприятие основных положений теории систем управления.

1.3. Оператор

С математической точки зрения на управляемые динамические системы можно смотреть как на операторы (отображения, функции), которые осуществляют отображение входных воздействий в выходные сигналы. Поэтому прежде всего введем понятие отображения, принятое в функциональном анализе [8 – 11].

Определение. *Пусть даны два произвольных множества X и Y и дан закон (правило), согласно которому каждому элементу* $x \in X$ *ставится в соответствие единственный, вполне определенный элемент* $y \in Y$. *Будем говорить тогда, что задан* ***оператор*** $y = f(x)$ *(пишут также* $y = fx$*), определенный на множестве X, с областью значений, принадлежащей множеству Y. Говорят также, что задано* ***отображение*** *множества X в множество Y и пишут* $f : X \to Y$. *В том частном случае, когда значения оператора являются вещественными или комплексными числами, оператор называется* ***функционалом***. *При этом множество X называют областью определения отображения f.*

Образ и прообраз множества. Элемент $y \in Y$, соответствующий при отображении *f* элементу $x \in X$, называется *образом* элемента *x*, а элемент *x* — *прообразом* элемента *y*. Отметим, что прообраз определяется, вообще говоря, неоднозначно. На рис. 1.1 в качестве примера показано, что элементы $x_1, x_2 \in A$ отображаемого множества *A* переводятся отображением *f* в один и тот же элемент *y*, т. е. $f(x_1) = f(x_2) = y$.

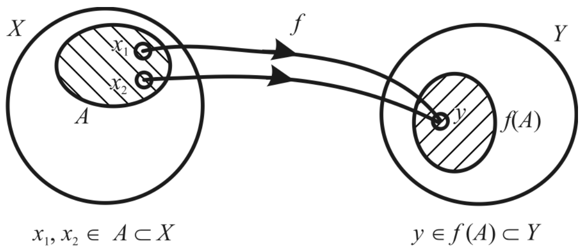

Рис. 1.1. Иллюстрация понятия отображения

Если отображение $y = f(x)$ переводит *X* на *Y*, то очевидно, что у каждого элемента $y \in Y$ существует по крайней мере один прообраз *x*. В том случае если у каждого элемента $y \in Y$ имеется только один прообраз $x \in X$, отображение *X* на *Y*, устанавливаемое формулой $y = f(x)$, называется *взаимно однозначным.*

Совокупность всех тех элементов *x* из *X*, образом которых является данный элемент $y \in Y$, называется *полным прообразом элемента y* и обозначается $f^{-1}(y)$.

Пусть $A \in X$, совокупность

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$

всех элементов вида $f(x)$, где $x \in A$, называется *образом A* и обозначается $f(A)$. В свою очередь для каждого множества *B* из *Y* определяется его полный прообраз $f^{-1}(B)$, а именно: $f^{-1}(B)$ есть совокупность всех тех элементов из X, образы которых принадлежат B. Может оказаться, что ни один элемент y из B не имеет непустого прообраза, тогда и прообраз $f^{-1}(B)$ будет пустым множеством.

Отображение «на» и «в». Условимся говорить, что некоторое обстоятельство имеет место *на* множестве, если оно имеет место для всех элементов этого множества, и *в* множество, если оно имеет место, может быть, не для всех элементов множества. Другими словами, будем говорить, что f есть отображение множества X *на* множество Y, если $f(X)=Y$. В общем случае, т. е. когда $f(X)\subset Y$, говорят, что f есть отображение X *в* Y.

1.4. Пространства

В математическом анализе [12 – 14], в функциональном анализе [8 – 11] и в линейной алгебре [15 – 17] множества произвольной природы наделяют определенными свойствами, превращая множества в различные виды *пространств*. Пространства, элементами которых являются функции или числовые последовательности, называются *функциональными пространствами.* Изучение некоторых классов операторов, определенных в функциональных пространствах, и составляет основное содержание теории линейных моделей управляемых систем.

Для того чтобы в анализе определить понятие предела последовательности, вводят метрические пространства.

Определение. *Множество X называется **метрическим пространством**, если каждой паре его элементов x и y поставлено в соответствие неотрицательное вещественное число $\rho(x, y)$, называемое **метрикой**, которое характеризует расстояние между данными элементами и удовлетворяет следующим аксиомам:*

- $\rho(x, y)\in\mathbb{R}^{+}$,
- $\rho(x, y)=0 \Leftrightarrow x=y$,
- $\rho(x, y)=\rho(x, y)$ (*аксиома симметрии*),
- $\rho(x, y)\le\rho(x, z)+\rho(z, y)$ (*аксиома треугольника*).

Элемент x метрического пространства X называется *пределом последовательности* элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ из X, если

$\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$. В этом случае пишут $x_n \to x$ или $\lim x_n = x$ и говорят, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к x. Это означает, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что при $n > N$ расстояние членов последовательности $\{x_n\}$ до своего предела x будет меньше ε, т. е. $\rho(x_n, x) < \varepsilon$.

Примерами метрических пространств являются числовая прямая, евклидово пространство и пространство непрерывных функций на отрезке с равномерной метрикой [8].

Пример 1.1. Пусть $X = \mathbb{R}$, где $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ — множество всех вещественных чисел (*числовая прямая*). Если $x, y \in \mathbb{R}$, то полагаем

$$\rho(x, y) = |x - y|.$$

Справедливость аксиом метрики очевидна. Сходимость в этом пространстве есть обычная сходимость числовых последовательностей.

Пример 1.2. Пусть X_n — арифметическое n-мерное пространство, т. е. множество всех упорядоченных систем из вещественных чисел. Если $x = [\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n]$ и $y = [\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n]$, то полагаем

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i)^2}.$$

Справедливость аксиом метрики легко проверить. Пусть $x_k = [\xi_1^k, \xi_2^k, ..., \xi_n^k]$ $(k = 1, 2, ..., n)$ и

$$\rho(x_k, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\xi_i^{(k)} - \xi_i\right)^2} \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Это равносильно условию $\xi_i^{(k)} \to \xi_i$, $(i = 1, 2, ..., n)$ при $k \to \infty$. Таким образом, сходимость в рассматриваемом пространстве есть сходимость по координатам. Пространство X_n с такой метрикой называют *n-мерным евклидовым пространством* и обозначают $\mathbb{R}^n$.

Пример 1.3. Пусть X — множество всех непрерывных функций, заданных на отрезке $[0,1]$. Введем метрику

$$\rho(x, y) = \max_t |x(t) - y(t)|.$$

◄ Проверим выполнение аксиом метрики. Очевидно, что $\rho(x,y) \geq 0$, причем $\rho(x,y) = 0$, лишь если $x(t) \equiv y(t)$, а также что $\rho(x,y) = \rho(y,x)$. Проверим аксиому треугольника. Для любого $t \in [0,1]$ с учетом $|a+b| \leq |a| + |b|$, $a, b \in \mathbb{R}$ имеем

$$|x(t) - y(t)| = |x(t) - z(t) + z(t) - y(t)| \leq |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)| \leq$$
$$\leq \max_t |x(t) - z(t)| + \max_t |z(t) - y(t)| = \rho(x, z) + \rho(z, y),$$

поэтому

$$\rho(x, y) = \max_t |x(t) - y(t)| \leq \rho(x, z) + \rho(z, y). \quad ►$$

Множество всех непрерывных функций, заданных на отрезке $[0,1]$, в котором метрика введена в виде $\rho(x, y) = \max_t |x(t) - y(t)|$, называется *пространством непрерывных функций* и обозначается $C[0,1]$. Для понимания сходимости в пространстве $C[0,1]$ приведем определение равномерной сходимости на множестве.

Определение [12]. *Предположим, что функциональная последовательность числовых функций $\{f_n(x)\}$, т. е.*

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \dots,\ f_n(x),\ \dots,$$

сходится на множестве X пространства $\mathbb{R}^n$ к предельной функции $f(x)$. Будем говорить, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к функции $f(x)$ ***равномерно*** *на множестве X, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется номер $N(\varepsilon)$, такой, что для всех номеров n, удовлетворяющих условию $n > N(\varepsilon)$, и для всех точек $x \in X$ справедливо неравенство*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

В этом определении весьма существенно, что номер N зависит только от ε и не зависит от точек x, т. е. утверждается то, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется универсальный номер $N(\varepsilon)$, начиная с которого неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ справедливо сразу для всех точек x множества *X*.

◄ Рассмотрим сходимость в пространстве $C[0,1]$ [8]. Пусть последовательность $\{x_n(t)\}$, составленная из элементов пространства $C[0,1]$, сходится к $x(t)$, т. е. $\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$. Это значит, что $\max\limits_t |x_n(t) - x(t)| \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, такой, что $\max\limits_t |x_n(t) - x(t)| < \varepsilon$ для $n > n_0(\varepsilon)$ и, следовательно, $|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon$ для $n > n_0(\varepsilon)$ и для всех $t \in [0,1]$. Но это означает, что последовательность $\{x_n(t)\}$ равномерно сходится к функции $x(t)$. Справедливо и обратное: если последовательность $\{x_n(t)\}$ равномерно сходится к $x(t)$, то $\rho(x_n, x) \to 0$. Итак, *сходимость в пространстве* $C[0,1]$ *есть равномерная сходимость на отрезке* $[0,1]$. ►

Определение [8, 9]. *Последовательность* $\{x_n\}$ *элементов метрического пространства X называется **последовательностью Коши (сходящейся в себе** или **фундаментальной)**, если для любого числа* $\varepsilon > 0$ *найдется номер* $n_0(\varepsilon)$, *такой, что*

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

при $n, m \geq n_0(\varepsilon)$.

Смысл последовательности Коши состоит в том, что члены с большими номерами не могут сильно отличаться друг от друга. Более того, при возрастании номеров члены последовательности приближаются друг к другу по выбранной метрике, поэтому

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}} \rho(x_n, x_m) = 0.$$

Утверждение [8]. *Если последовательность* $\{x_n\}$ *сходится к пределу* x_0, *то она сходится в себе.*

◀ Действительно, пусть $x_0 = \lim x_n$. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется номер $n_0(\varepsilon)$, такой, что $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon/2$ при $n \ge n_0(\varepsilon)$. Следовательно, пользуясь неравенством треугольника, имеем

$$\rho(x_n, x_m) < \rho(x_n, x_0) + \rho(x_m, x_0) < \varepsilon$$

для $n, m \ge n_0(\varepsilon)$. ▶

Обратное утверждение для произвольного метрического пространства неверно, так как существуют метрические пространства, в которых имеются последовательности, сходящиеся в себе, но не сходящиеся ни к какому пределу. Для последовательностей действительных чисел обратное утверждение справедливо.

Определение. *Если в метрическом пространстве X каждая сходящаяся в себе последовательность сходится к некоторому пределу, являющемуся элементом того же пространства, то пространство X называется* ***полным****.*

Критерий Коши равномерной сходимости последовательности [12]. *Для того чтобы функциональная последовательность числовых функций $\{f_n(x)\}$* ***равномерно*** *на множестве X сходилась к некоторой предельной функции, необходимо и достаточно, чтобы для произвольного числа $\varepsilon > 0$ нашелся номер $N(\varepsilon)$, гарантирующий справедливость неравенства*

$$\left| f_{n+p}(x) - f_n(x) \right| < \varepsilon$$

для всех номеров n, удовлетворяющих условию $n \ge N(\varepsilon)$, всех натуральных p $(p = 1, 2, \ldots)$ и всех точек x из множества X.

Для случая евклидова *n*-мерного пространства $\mathbb{R}^n$ полнота следует из критерия Коши существования предела последовательности точек этого пространства.

Утверждение [8]. *Пространство $C[0,1]$ — полное.*

◀ Рассмотрим пространство $C[0,1]$. Пусть дана последовательность $\{x_n(t)\}$, где $x_n(t) \in C[0,1]$, $n = 1, 2, \ldots$, и пусть $\rho(x_n, x_m) \to 0$ при $n, m \to \infty$. Это означает, что для последовательности $\{x_n(t)\}$ выполняется условие Коши равномерной сходимости на отрезке $[0,1]$ и, следовательно, существует непрерывная на отрезке $[0,1]$ функция $x_0(t)$, к которой на отрезке $[0,1]$ равномерно сходится последовательность $\{x_n(t)\}$. Таким образом, $x_0(t) \in C[0,1]$ и $\rho(x_n, x_0) = \max\limits_t |x_n(t) - x_0(t)| \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. $C[0,1]$ — полное пространство. ►

Множество X может обладать линейными свойствами, т. е. его элементы можно складывать и умножать на числа.

Определение. *Множество X называется* ***линейным векторным пространством****, если в нем определены операция сложения, сопоставляющая каждым двум элементам третий элемент, называемый суммой, т. е.*

$$(x, y) \mapsto x + y, \ \ x, y, x + y \in X,$$

и умножение на числа, т. е.

$$c \in \mathbb{R}, x \mapsto cx, \ \ x, cx \in X,$$

причем требуется, чтобы выполнялись следующие свойства:

1) $x + (y + z) = (x + y) + z$ *(ассоциативность по сложению);*

2) $x + y = y + x$ *(коммутативность);*

3) $\exists\, 0 \in X : x + 0 = x$*;*

4) $\forall x \in X,\ \exists -x:\ x + (-x) = 0$*, где –x — элемент, противоположный x;*

5) $c(x + y) = cx + cy,\ c \in \mathbb{R}$ *(дистрибутивность);*

6) $(a + b)x = ax + by,\ a, b \in \mathbb{R}$ *(дистрибутивность);*

7) $(ab)x = a(bx),\ a, b \in \mathbb{R}$ *(ассоциативность по умножению на число);*

8) $\exists\, 1,\ 1 \cdot x = x$.

Элементы векторного пространства называются *векторами*. Примерами линейных пространств могут служить n-мерное арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$, пространство непрерывных функций на отрезке $C[0,1]$, совокупность полиномов от λ степени, не превышающей n, и т. п.

Определение [8]. *Два линейных пространства X и Y считаются изоморфными, если между их элементами и линейными опе-*

рациями может быть установлено взаимно однозначное соответствие. Если $x \leftrightarrow x'$, $y \leftrightarrow y'$, *то* $(x+y) \leftrightarrow (x'+y')$, $\lambda x \leftrightarrow \lambda x'$.

Утверждение. *Все конечномерные линейные пространства n измерений изоморфны*[3] *друг другу.*

Элементы $x_1, x_2, \dots, x_n$ называются *линейно зависимыми* (*независимыми*), если существует (не существует) такая невырожденная линейная комбинация, что

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0,$$

где не все $a_j = 0$.

Определение. ***Размерностью*** $\dim X$ *векторного пространства X называется наименьшее число векторов, через которые могут быть линейно выражены все векторы этого пространства.*

Теорема [16]. $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Подмножество $A \subset X$ называется подпространством, если выполняются свойства:

1) $x, y \in A \Rightarrow x + y \in A$,
2) $x \in A \Rightarrow ax \in A, a \in \mathbb{R}$,
3) $0 \in A$.

Всякое подпространство само является векторным пространством.

Определение. *Любая система из n векторов в n-мерном векторном пространстве, через которые выражаются все векторы пространства, называется* ***базисом*** *этого пространства.*

Следует заметить, что если переставить местами какие-либо два вектора в базисе, то получится новый базис.

Пусть задана произвольная система векторов

$$x_1, x_2, \dots, x_n \in X.$$

Определим их линейную оболочку как множество вида

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i : a_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

[3] Изоморфизм — подобная форма (от гр. *isos* — подобный + *morphe* — форма). Изоморфные пространства можно рассматривать как различные реализации одного и того же пространства.

Линейная оболочка является подпространством, поскольку выполняются аксиомы подпространства:

1) $\sum a_i x_i + \sum b_i x_i = \sum (a_i + b_i) x_i$,

2) $c \sum a_i x_i = \sum (c a_i)\, x_i$,

3) $0 = \sum 0 \cdot x_i$.

Линейная оболочка — это подпространство, натянутое на систему векторов.

Определение [15–17]. ***Ранг системы векторов*** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — *это размерность ее линейной оболочки*

$$\mathrm{rk}[x_1, \ldots, x_n] = \dim\langle x_1, \ldots, x_n \rangle .$$

Рангом матрицы называется ранг системы ее строк.

Теорема. *Ранг системы строк любой матрицы равен рангу системы ее столбцов*: $\mathrm{rk}\, A = \mathrm{rk}\, A^{\mathrm{т}}$.

Другими словами, матрица A и транспонированная матрица $A^{\mathrm{т}}$ вырождены или невырождены одновременно.

Определение. *Множество X (которое может быть множеством векторов, матриц, сигналов или систем) называется **линейным нормированным пространством**, если X — линейное пространство с умножением на числа, а каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие вещественное число $\|x\|$, т. е. на X задана скалярная функция (функционал) $x \mapsto \|x\|$, называемая **нормой**. Норма обязана удовлетворять следующим условиям (аксиомам):*

1) $\|x\| \ge 0$,

2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ *для всех комплексных скаляров* λ (*однородность*),

4) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ (*неравенство треугольника*).

В линейном нормированном пространстве вводится метрика в виде равенства $\rho(x, y) = \|x - y\|$, которое удовлетворяет условиям метрики. Отсюда следует, что *норма элемента — это его расстояние от нулевого элемента*. При этом сходимость последовательности элементов $\{x_n\}$ к x, т. е. $x_n \to x$, определяется как сходимость по введенной норме $\|x_n - x\| \to 0$ при $n \to \infty$. Полное (в смысле сходимости по норме) линейное нормированное пространство называется ***банаховым пространством*** (пространством Ба́наха).

Рассмотрим примеры банаховых пространств [8].

Пример 1.4. Если в n-мерном евклидовом пространстве ввести норму по формуле

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \right)^{1/2}, \quad x = [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n],$$

то получим банахово пространство $\mathbb{R}^n$. Метрика в этом пространстве совпадает с ранее введенной метрикой в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

Пример 1.5. Пусть $C[0,1]$ — банахово пространство, в котором определены сложение функций и умножение их на числа. Норма в $C[0,1]$ вводится как $\|x\| = \max_t |\, x(t)\,|$. Метрика полученного линейного пространства совпадает с ранее введенной метрикой в $C[0,1]$.

Пример 1.6. Пространство Харди устойчивых матричных передаточных функций H_∞ является банаховым пространством [6]. ■

1.5. Линейные операторы в линейных нормированных пространствах

Совокупность точек x пространства X, удовлетворяющих неравенству $\rho(x, a) < r$ (соответственно неравенству $\rho(x, a) \le r$), называется *шаром* (соответственно *замкнутым шаром*) с центром в точке a и радиусом r. Будем обозначать такой шар $K(x, r)$ (соответственно $\bar{K}(x, r)$), т. е. $K(a,r) = \{x \in X : \rho(x,a) < r\}$ ($\overline{K}(a,r) = \{x \in X : \rho(x,a) \le r\}$).

Окрестностью точки x называется любой шар с центром в этой точке. Множество, лежащее целиком внутри некоторого шара, называется *ограниченным*.

Определение. *Пусть X и Y — линейные пространства. Оператор $A: X \to Y$, определенный на пространстве X и принимаю-*

щий значения в пространстве Y, называется ***линейным****, если он аддитивен,*

$$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2,$$

и однороден,

$$A(\lambda x) = \lambda Ax .$$

Это же самое можно записать одним выражением:

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Ax_1 + \beta Ax_2 .$$

Множество D_A элементов x, для которых определено значение Ax, называется *областью определения* A, а $R_A = AD_A$ — *областью значений* (образом) оператора A, т. е.

$$R_A = \operatorname{Im} A .$$

Множество решений уравнения $Ax = 0$ называется *нуль-пространством* (*ядром*) оператора A и обозначается $\operatorname{Ker} A$. Оператор A отображает ядро в нуль:

$$A(\operatorname{Ker} A) = 0 .$$

Пример 1.7. Дифференцирование является линейным отображением пространства непрерывно дифференцируемых функций на заданном промежутке числовой прямой в пространство непрерывных функций на этом промежутке. Ядром отображения дифференцирования является совокупность постоянных функций, а образом — пространство всех непрерывных функций, что следует из существования первообра́зной $x(t)$ у каждой непрерывной функции $y(t)$, доказываемого в математическом анализе $\dot{x}(t) = y(t)$. ■

Оператор A называется *непрерывным* в точке x_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon)$, такое, что как только $\|x - x_0\| < \delta$, то $\|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$.

Когда X и Y — нормированные пространства, то оператор A называется *равномерно-непрерывным*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что из неравенства

$$\|x' - x''\|_X < \delta \ (x', x'' \in D_A)$$

следует

$$\|Ax' - Ax''\|_Y < \varepsilon \quad (Ax', Ax'' \in R_A).$$

Утверждение. *Если линейный оператор непрерывен в нуле, то он равномерно-непрерывен на всей области определения.*

◀ В самом деле, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$, такое, что как только $\|x\| < \delta$, то $\|Ax\| < \varepsilon$. Тогда в силу линейности оператора A имеем $\|Ax' - Ax''\| = \|A(x' - x'')\| < \varepsilon$ всякий раз, когда $\|x' - x''\| < \delta$, $x', x'' \in X$. ▶

Отсюда следует теорема.

Теорема. *Линейный оператор A, определенный на линейном нормированном пространстве X, принимающий значения в линейном нормированном пространстве Y и непрерывный в одной точке* $x_0 \in X$, *равномерно-непрерывен на всем X.*

Пример 1.8. Оператор, переводящий конечномерное пространство в конечномерное посредством матрицы A:

$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad y = Ax = [a_1, a_2, ..., a_n]x,$$

где $a_1, \dots, a_n$ — столбцы матрицы A, или в координатной записи

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \ i = 1, \dots, m.$$

В этом случае образом оператора A является линейная оболочка системы столбцов матрицы $[a_{ij}]$: $a_1, \dots, a_n$, т. е.

$$\operatorname{Im} A = \langle a_1, ..., a_n \rangle = \{[a_1, a_2, \dots, a_n]\, x, x \in \mathbb{R}^n\} =$$
$$= \{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n\} \subset \mathbb{R}^m. \ ■$$

Всякий линейный оператор, заданный в конечномерном пространстве, автоматически непрерывен.

Если X и Y — нормированные пространства, то линейный оператор A, действующий из X в Y, называется *ограниченным*, когда он переводит всякий шар в ограниченное множество. Поскольку оператор A линеен, то условие ограниченности можно сформулировать по-другому.

Оператор A ограничен, если существует такая постоянная $C > 0$, что для всякого элемента $x \in X$

$$\|Ax\| \le C\|x\|.$$

Наименьшее из чисел C, удовлетворяющих этому неравенству, называется *нормой оператора* A и обозначается $\|A\|$. Определение нормы оператора A можно записать и по-другому:

$$\|A\| = \sup_{x \ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Иногда это утверждение формулируется в виде теоремы и доказывается [9] с использованием определения точной верхней грани — наименьшей из всех верхних граней ограниченного сверху множества $\{x\}$ [10, 12]. Норма оператора A — это наибольший коэффициент «растяжения» элементов $x \in X$, или точная верхняя грань, достигаемая нормой образов оператора A в Y на границе единичного шара в X с центром в нуле.

Неравенство треугольника для нормы оператора. Пусть A и B — два линейных оператора, действующих из линейного пространства X в Y. Назовем их суммой $A + B = C$, где оператор C ставит в соответствие элементу $x \in X$ элемент

$$y = Ax + Bx \in Y.$$

Оператор C определен на всех элементах, принадлежащих пересечению $D_A \cap D_B$ областей определения операторов A и B.

Если X и Y — нормированные пространства, а операторы A и B ограничены, то оператор $A + B$ тоже ограничен, причем

$$\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|.$$

◄ Действительно, для любого элемента $x \in D_A \cap D_B$

$$\|(A + B)x\| = \|Ax + Bx\| \le \|Ax\| + \|Bx\| \le \left(\|A\| + \|B\|\right)\|x\|.$$

Отсюда, а также из определения нормы оператора следует неравенство треугольника для норм операторов. ►

Свойство однородности. Это свойство имеет вид $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$. Докажем его:

◄ $\|\lambda Ax\| = |\lambda| \cdot \|Ax\| \le |\lambda| \cdot \|A\| \cdot \|x\| \Rightarrow \|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$. ►

Определение. *Пусть A и B — линейные операторы, такие, что*

$$A : X \to Y, \quad B : Y \to Z .$$

Произведением BA операторов A и B называется оператор C, ставящий в соответствие элементу $x \in X$ *элемент* $z \in Z$, т. е.

$$z = B(Ax), \quad Ax \in Y .$$

Область определения D_C оператора $C = BA$ состоит из тех элементов $x \in D_A$, для которых $Ax \in D_B$. Оператор BA линеен. Он непрерывен, если A и B непрерывны.

Если A и B — ограниченные операторы, действующие в нормированных пространствах, то и оператор BA ограничен, откуда следует

$$\|BA\| \le \|B\| \cdot \|A\| .$$

◄ Действительно, $\|B(Ax)\| \le \|B\| \cdot \|Ax\| \le \|B\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|$, откуда следует предыдущее неравенство. ►

Теорема. *Всякий непрерывный линейный оператор ограничен.*

Определение. *Пусть A — оператор, действующий из X в Y, и* D_A *— область определения, а* $\operatorname{Im} A$ *— образ этого оператора. Оператор A называется* ***обратимым****, если для любого элемента* $y \in \operatorname{Im} A$ *уравнение*

$$Ax = y$$

имеет единственное решение.

Если оператор A обратим, то каждому элементу $y \in \operatorname{Im} A$ можно поставить в соответствие единственный элемент $x \in D_A$, являющийся решением уравнения $Ax = y$. Оператор, осуществляющий это соответствие, называется *обратным к A* и обозначается A^{-1}, а его действие выглядит так: $x = A^{-1} y$.

Теорема [9]. *Оператор* A^{-1}*, обратный линейному оператору A, также линеен.*

◀ Пусть $y_1, y_2 \in \operatorname{Im} A$. Достаточно проверить выполнение неравенства

$$A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2 .$$

Пусть $Ax_1 = y_1$, $Ax_2 = y_2$. В силу линейности *A* имеем

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 . \tag{1.1}$$

По определению обратного оператора

$$A^{-1} y_1 = x_1, \ A^{-1} y_2 = x_2 .$$

Откуда, умножив эти равенства на α_1 и α_2 соответственно и сложив, получим

$$\alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 .$$

Из (1.1) и из определения обратного оператора следует, что

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) .$$

С учетом двух последних равенств имеем

$$A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2 . \ \blacktriangleright$$

Если оператор $A: X \to X$ взаимно однозначно отображает *X* на *X*, то это означает, что уравнение $Ax = y$ при любом элементе *y* имеет единственное решение $x = A^{-1} y$, где A^{-1} — *обратный оператор*.

Подстановка $x = A^{-1} y$ в $Ax = y$ дает $AA^{-1} y = y$, а подстановка $y = Ax$ в $x = A^{-1} y$ приводит к $x = A^{-1} Ax$. Таким образом,

$$AA^{-1} = A^{-1} A = I .$$

Иными словами, произведение оператора на свой обратный оператор в любом порядке есть тождественное преобразование *I*. Следовательно, левый и правый обратные операторы совпадают.

Если $A: X \to Y$, то $A^{-1} A$ — тождественное преобразование в *X*, а AA^{-1} — тождественное преобразование в *Y*. В этом смысле левый и правый обратные операторы различаются.

Пространство линейных операторов. На множестве линейных ограниченных операторов, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y, естественным образом вводятся операции

$$(A+B)\,x = Ax + Bx,\ \ (\lambda A)x = \lambda Ax\,,$$

в силу чего совокупность линейных операторов $A: X \to Y$ образует линейное пространство $L(X,Y)$, которое становится банаховым после введения нормы

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1}\|Ax\|\,.$$

Пространство $L(X,Y)$ остается банаховым, даже если X неполно, т. е. просто линейное нормированное пространство.

Теорема. *Если пространство Y пóлно, то* $L(X,Y)$ *также полно и, следовательно, банахово пространство.*

Теорема (об обращении оператора $(I-A)$) [8, 9]. *Пусть линейный ограниченный оператор A отображает банахово пространство X в X и* $\|A\| \le q < 1$. *Тогда оператор* $(I-A)$ *имеет обратный линейный ограниченный оператор.*

◄ В пространстве операторов, определенных на X и принимающих значения в том же пространстве, рассмотрим операторный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = I + A + A^2 + \ldots + A^k + \ldots\ .$$

Так как $\|A^2\| = \|A\cdot A\| \le \|A\|\cdot\|A\| = \|A\|^2$ и аналогично $\|A^n\| \le \|A\|^n$, то для частичных сумм $S_n = \sum_{k=0}^{n} A^k$ имеем

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \|A^{n+1} + A^{n+2} + \ldots + A^{n+p}\| \le \|A^{n+1}\| + \|A^{n+2}\| + \ldots + \|A^{n+p}\| \le$$
$$\le \|A\|^{n+1} + \|A\|^{n+2} + \ldots + \|A\|^{n+p} \le q^{n+1} + q^{n+2} + \ldots + q^{n+p} \to 0$$

при $n \to \infty,\ p > 0$, так как $q < 1$. Поэтому последовательность частичных сумм ряда $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ сходится в себе, а значит, в силу полноты пространства операторов и к некоторому пределу, принадлежащему этому пространству, т. е. ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$ сходится. Пусть S — сумма ряда $\sum A^k$: $S = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, где $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} A^k$. Тогда

$$\begin{aligned} S(I-A) &= \lim_{n\to\infty} S_n(I-A) = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_n A) = \\ &= \lim_{n\to\infty}(I + A + A^2 + \ldots + A^n - A - A^2 - A^3 - \ldots - A^{n+1}) = \\ &= \lim_{n\to\infty}(I - A^{n+1}) = I. \end{aligned}$$

Так как $\left\|A^{n+1}\right\| \le \left\|A\right\|^{n+1} \le q^{n+1} \to 0, n \to \infty \Rightarrow A^{n+1} \to 0,$ поскольку $\left\|x\right\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Аналогично

$$(I - A)S = (I - A)\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - AS_n) = I.$$

Таким образом,

$$S(I - A) = I\,,\ (I - A)S = I,$$

поэтому

$$S = (I - A)^{-1}.$$

Легко видеть, что S — линейный оператор. Кроме того, он ограничен, так как

$$\left\|S\right\| \le \sum_{n=0}^{\infty} \left\|A\right\|^n \le \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Итак, $S = (I - A)^{-1}$ — линейный ограниченный оператор. ►

Теорема (о возмущении обратного оператора)**.** *Пусть оператор* $A \in L(X,Y)$ *имеет обратный* A^{-1} *и оператор* ΔA *таков, что* $\left\|\Delta A\right\| < \left\|A^{-1}\right\|^{-1} = \dfrac{1}{\left\|A^{-1}\right\|}$ *Тогда оператор* $B = A + \Delta A$ *имеет обратный* B^{-1}*, причем*

$$\left\|B^{-1}-A^{-1}\right\| \le \frac{\|\Delta A\|}{1-\underbrace{\left\|A^{-1}\right\|\cdot\|\Delta A\|}_{<1}}\left\|A^{-1}\right\|^2 .$$

◄ Преобразуем возмущенный оператор так: $A+\Delta A = A(I+A^{-1}\Delta A)$. Поскольку

$$\left\|A^{-1}\Delta A\right\| \le \left\|A^{-1}\right\|\cdot\|\Delta A\| < 1,$$

то оператор $I+A^{-1}\Delta A$ имеет обратный по предыдущей теореме об обращении оператора:

$$(I+A^{-1}\Delta A)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(A^{-1}\Delta A)^n .$$

Тогда $(I+A^{-1}\Delta A)^{-1}A^{-1}$ есть оператор, обратный оператору $A(I+A^{-1}\Delta A)=A+\Delta A$. (Это следует из правила $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.)

Получим оценку нормы разности обратных операторов — возмущенного и исходного:

$$\left\|(A+\Delta A)^{-1}-A^{-1}\right\| = \left\|(I+A^{-1}\Delta A)^{-1}A^{-1}-A^{-1}\right\| =$$
$$= \left\|\left[(I+A^{-1}\Delta A)^{-1}-I\right]A^{-1}\right\| \le \left\|A^{-1}\right\|\cdot\left\|(I+A^{-1}\Delta A)^{-1}-I\right\| =$$
$$= \left\|A^{-1}\right\|\cdot\left\|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(A^{-1}\Delta A)^n\right\| \le \left\|A^{-1}\right\|\sum_{n=1}^{\infty}\left\|A^{-1}\Delta A\right\|^n = \frac{\left\|A^{-1}\Delta A\right\|}{1-\left\|A^{-1}\Delta A\right\|}\left\|A^{-1}\right\| \le$$
$$\le \frac{\left\|A^{-1}\right\|\cdot\|\Delta A\|}{1-\left\|A^{-1}\right\|\cdot\|\Delta A\|}\left\|A^{-1}\right\| = \frac{\|\Delta A\|}{1-\left\|A^{-1}\right\|\cdot\|\Delta A\|}\left\|A^{-1}\right\|^2 .$$

Из полученной оценки видно, что $\left\|B^{-1}-A^{-1}\right\| \to 0$ при $\|\Delta A\| \to 0$. ►

Операторы, зависящие от параметра. Часто в различных разделах математики и теории управления встречаются выражения вида

$$Ax-\lambda x=y, \text{ или } (A-\lambda I)x=y,$$

где A — линейный оператор; λ — некоторый параметр.

Например, такое уравнение получается при переходе от линейного дифференциального уравнения в пространство изображений по Лапласу:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t) \;\Rightarrow\; sx(s) = Ax(s) + u(s), \quad x(0) = 0,$$

$$(A - sI)x(s) = -u(s),$$

где $x = x(s)$; $y = -u(s)$, $s \in \mathbb{C}$.

Наряду с неоднородным уравнением $(A - \lambda I)x = y$ рассмотрим однородное уравнение [8]

$$Ax - \lambda x = 0\text{, или } (A - \lambda I)x = 0.$$

Это уравнение всегда имеет решение $x = 0$, которое называется *тривиальным*.

Допустим, что для некоторого параметра λ оператор $A - \lambda I$ имеет обратный $(A - \lambda I)^{-1} = R(\lambda)$. Данный обратный оператор называется *резольвентным оператором* (или *резольвентой*, от лат. *resolvere* — решать) для уравнения $(A - \lambda I)x = y$. Тогда для этого λ данное неоднородное уравнение имеет при любом элементе y единственное решение

$$x = R(\lambda)y.$$

Однородное уравнение $(A - \lambda I)x = 0$ в этом случае имеет только тривиальное решение $x = 0$.

Значения λ, при которых уравнение $(A - \lambda I)x = y$ имеет единственное решение при любом элементе y, а оператор $R(\lambda)$ ограничен, называются *регулярными значениями* для уравнения $(A - \lambda I)x = y$ или для оператора A.

Если уравнение $(A - \lambda I)x = 0$ при заданном значении параметра λ имеет кроме тривиального решения некоторое другое, то такое значение λ называется *собственным значением* (или *характеристическим числом*) для уравнения $(A - \lambda I)x = y$ или оператора A, а нетривиальное решение называется *собственным элементом* уравнения $(A - \lambda I)x = y$ или оператора A, соответствующим данному собственному значению λ.

Пусть λ — собственное значение оператора A и уравнение $(A-\lambda I)x = y$ имеет решение при некотором элементе y, тогда решение не является единственным. Действительно, пусть x_0 — решение уравнения $(A-\lambda I)x = y$, т. е.

$$Ax_0 - \lambda x_0 = y$$

и $\overline{x}$ — собственный элемент оператора A, соответствующий собственному значению λ, т. е.

$$A\overline{x} - \lambda\overline{x} = 0 .$$

Тогда, сложив последнее уравнение с предыдущим, получим в силу линейности оператора A

$$A(x_0 + \overline{x}) - \lambda(x_0 + \overline{x}) = y ,$$

и, значит, $x_0 + \overline{x}$ также является решением уравнения $(A-\lambda I)x = y$.

Совокупность всех значений λ, не являющихся регулярными, называется *спектром* $\sigma(A)$ *оператора A*. В частности, все собственные значения принадлежат спектру.

Утверждение. *Резольвента удовлетворяет тождеству Гильберта:*

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\lambda - \mu)R(\lambda)R(\mu) .$$

◄ Пусть $R(\lambda) = (A-\lambda I)^{-1}$, $R(\mu) = (A-\mu I)^{-1}$. Перепишем тождество Гильберта с учетом данных обозначений по определению резольвенты:

$$(A-\lambda I)^{-1} - (A-\mu I)^{-1} = (\lambda-\mu)(A-\lambda I)^{-1}(A-\mu I)^{-1} .$$

Умножим это равенство слева на $A-\lambda I$:

$$I - (A-\lambda I)(A-\mu I)^{-1} = (\lambda-\mu)(A-\mu I)^{-1} .$$

Умножив полученное равенство справа на $A-\mu I$, придем к тождеству

$$(A-\mu I) - (A-\lambda I) = (\lambda-\mu)I. \ ►$$

Теорема [9]. *Если* A *— ограниченный линейный оператор в банаховом пространстве* X *и* $|\lambda| > \|A\|$*, то* λ *— регулярная точка.*

◀ Приняв во внимание, что

$$A - \lambda I = -\lambda\left(I - \frac{1}{\lambda}A\right),$$

получим

$$R(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\lambda^k}.$$

При $\|A\| < |\lambda|$ этот ряд, называемый *рядом Неймана* [10], сходится и задает определенный на всем пространстве X ограниченный оператор (теорема: $(I - A)^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$). Другими словами, спектр оператора A содержится в круге радиусом $\|A\|$ с центром в нуле. ▶

Спектральный радиус $\rho(A)$ — это радиус минимального круга, содержащего весь спектр $\sigma(A)$. Из доказанной теоремы следует, что

$$\rho(A) \le \|A\|.$$

Теорема [10]. $\rho(A) = \lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{\|A^k\|}$.

Теорема (о возмущении регулярного значения) [8]. *Если* λ *— регулярное значение, то и* $\lambda + \Delta\lambda$ *при* $|\Delta\lambda| < \left\|(A - \lambda I)^{-1}\right\|^{-1}$ *также есть регулярное значение.*

◀ Обратимся к теореме, по которой оператор $\hat{A} + \Delta\hat{A}$ имеет обратный, если $\|\Delta\hat{A}\| < \dfrac{1}{\|\hat{A}^{-1}\|}$. В данном случае

$$A - (\lambda + \Delta\lambda)I = \underbrace{A - \lambda I}_{\hat{A}}\underbrace{-\Delta\lambda \cdot I}_{\Delta\hat{A}},$$

$$\|\Delta\hat{A}\| = \|-\Delta\lambda \cdot I\| = |\Delta\lambda| \cdot \|I\| = |\Delta\lambda|,$$

и так как норма тождественного оператора равна единице,

$$\|I\| = \sup_{\|x\|=1}\|Ix\| = \sup_{\|x\|=1}\|x\| = 1,$$

то

$$\left\|\Delta\hat{A}\right\| = |\Delta\lambda| < \frac{1}{\left\|\hat{A}^{-1}\right\|} = \frac{1}{\left\|(A-\lambda I)^{-1}\right\|}. \blacktriangleright$$

Отсюда следует, что совокупность регулярных значений есть *открытое множество*, значит, спектр — *замкнутое множество*, поскольку оно является дополнительным к множеству регулярных значений.

Операции над множествами. Пусть A и B — произвольные множества; их *суммой*, или *объединением* $C = A \bigcup B$, называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A и B. Назовем *пересечением* $C = A \bigcap B$ множеств A и B множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих как A, так и B. Определим для множеств операцию вычитания. Мы назовем *разностью* $C = A \setminus B$ множеств A и B совокупность всех элементов из A, которые не принадлежат B. При этом в общем случае не предполагается, что $B \subset A$.

Иногда рассматривается запас множеств, являющихся подмножествами некоторого основного множества S, например различные множества точек на числовой прямой. В этом случае разность $S \setminus A$ называется *дополнением* множества $A \subset S$.

Для множества M метрического пространства X, $M \subset X$, точка a называется *предельной точкой* этого множества, если любая окрестность точки a содержит хотя бы одну точку множества $M \setminus a$, т. е. если

$$K(a,r) \bigcap (M \setminus a) \neq \varnothing$$

при любом радиусе r. Множество, полученное присоединением к M всех его предельных точек, называется *замыканием множества* M и обозначается $\overline{M}$. Точки $\overline{M}$ называются *точками прикосновения* множества M. Точка $x \in M$ называется *внутренней точкой* этого множества, если она входит в множество M вместе с некоторой окрестностью. Элемент $u \in X$ считается предельной точкой множества $U \subset X$, если любая окрестность u содержит хотя бы одну точку из U помимо самой u.

Теорема. *Для любой матричной нормы (и, в частности, для любой индуцированной нормы)* $\|A\| = \sup\limits_{x \neq 0} \left(\|Ax\| / \|x\|\right)$

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

◀ Так как $\lambda_i(A)$ есть собственное значение матрицы A, то $Ax_i = \lambda_i x_i$, где x_i — собственный вектор. Имеем

$$|\lambda_i| \cdot \|x_i\| = \|\lambda_i x_i\| = \|Ax_i\| \leq \|A\| \cdot \|x_i\|.$$

Таким образом, для любой матричной нормы

$$|\lambda_i(A)| \leq \|A\|.$$

Поскольку этот результат имеет место для всех собственных значений, то

$$\rho(A) = \max |\lambda_i(A)| \leq \|A\|. ▶$$

Здесь важно отметить, что доказанные теорема о спектре $\sigma(A)$ линейного оператора и теорема о спектре матрицы A имеют непосредственное отношение к *задаче управления спектром матрицы* и позволяют более полно понять проблему размещения корней характеристического полинома замкнутой линейной системы управления. Пусть задана система уравнений вида

$$\dot{x} = Ax + Bu, \; x \in \mathbb{R}^n, \; u \in \mathbb{R}^m,$$
$$y = Cx, \; y \in \mathbb{R}^l,$$

где A, B, C — вещественные $(n \times n)$-, $(n \times m)$-, $(l \times n)$- матрицы соответственно. Управление по выходу системы осуществляется по принципу обратной связи:

$$u = -Ky,$$

где K — вещественная $(m \times l)$- матрица.

Тогда ***проблема управления спектром матрицы*** формулируется так: *дана тройка вещественных матриц* A, B, C *и дан произ-*

вольный набор $\{\mu_j\}_{j=1}^n$ *комплексных чисел* μ_j, *замкнутый относительно операции комплексного сопряжения. Требуется найти вещественную матрицу K, такую, чтобы спектр матрицы* $A - BKC$ *совпадал с набором* $\{\mu_j\}_{j=1}^n$, *т. е.*

$$\sigma(A - BKC) = \{\mu_j\}_{j=1}^n .$$

Следует заметить, что здесь матрица $A - BKC$ — это матрица замкнутой системы управления, для которой при любой матрице обратной связи K выполняется соотношение

$$\rho(A - BKC) \le \|A - BKC\| .$$

Перейдем к принципу сжимающих отображений, сформулированному польским математиком С. Банахом [8 – 10]. Данный принцип в функциональном анализе проявляется как метод последовательных приближений, который используется для различных типов уравнений, в частности для дифференциальных уравнений. Этот принцип лежит в основе метода точечных отображений, применяемого для анализа нелинейных динамических систем [18].

Определение. *Отображение A метрического пространства X в это же пространство называется* ***сжимающим****, если существует такое число* $0 < \alpha < 1$, *что*

$$\rho\big(A(x), A(y)\big) \le \alpha\rho(x, y) ,$$

где α *не зависит от* $x, y \in X$.

Это означает, что расстояние между образами $A(x)$ и $A(y)$ сжимающего отображения A строго меньше расстояния между прообразами $x, y \in X$, т. е. сжимающее отображение A уменьшает расстояние между любыми двумя отображаемыми элементами метрического пространства X.

Теорема (принцип сжимающих отображений)**.** *Всякое сжимающее отображение A полного метрического пространства* (X, ρ) *в это же пространство имеет единственную неподвижную точку* $x_0 \in X$, *т. е. такую точку* $x_0 \in X$, *что*

$$Ax_0 = x_0 .$$

◄ Для любого элемента $x \in X$ положим

$$x_1 = Ax,$$
$$x_2 = A(Ax) = A^2 x,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = Ax_{n-1} = A^n x.$$

Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ сходится в себе:

$$\rho(x_1, x_2) = \rho(Ax, Ax_1) \le \alpha\rho(x, x_1) = \alpha\rho(x, Ax),$$
$$\rho(x_2, x_3) = \rho(Ax_1, Ax_2) \le \alpha\rho(x_1, x_2) \le \alpha^2\rho(x, Ax),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\rho(x_n, x_{n+1}) \le \alpha^n \rho(x, Ax).$$

Применив аксиому треугольника для метрики

$$\rho(x, z) \le \rho(x, y) + \rho(y, z),$$

получим

$$\begin{aligned}\rho(x_n, x_{n+p}) &\le \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \le \\ &\le (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \ldots + \alpha^{n+p-1})\rho(x, Ax) = \\ &= (1 + \alpha + \ldots + \alpha^{p-1})\alpha^n \rho(x, Ax) = \\ &= \frac{1-\alpha^p}{1-\alpha}\alpha^n \rho(x, Ax) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x, Ax),\end{aligned}$$

где $\dfrac{1-\alpha^p}{1-\alpha}$ — сумма геометрической прогрессии.

Отсюда при $n \to \infty$, $\alpha < 1$, $\rho(x_n, x_{n+p}) \to 0$, где $p > 0$. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной, т. е. сходится в себе. Пространство X является полным, поэтому существует элемент $x_0 \in X$, который является пределом последовательности $\{x_n\}$: $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Тогда в силу непрерывности отображения A, поскольку оно является сжимающим, т. е. $x_n \to x_0$, $Ax_n \to Ax_0$, имеем

$$Ax_0 = A\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x_0.$$

Это утверждение можно доказать и не используя предварительного знания о том, что отображение A непрерывно. Действительно,

$$\rho(x_0, Ax_0) \le \rho(x_0, x_n) + \rho(x_n, Ax_0) =$$
$$= \rho(x_n, x_0) + \rho(Ax_{n-1}, Ax_0) \le \rho(x_n, x_0) + \alpha\rho(x_{n-1}, x_0).$$

Но при любом заданном числе $\varepsilon > 0$ и достаточно большом номере n с учетом $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$ имеем

$$\rho(x_0, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \alpha\rho(x_0, x_{n-1}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, $\rho(x_0, Ax_0) < \varepsilon$. Так как число $\varepsilon > 0$ произвольно, то $\rho(x_0, Ax_0) = 0$, т. е. $Ax_0 = x_0$. Итак, существование неподвижной точки доказано. Теперь докажем ее единственность от противного.

Предположим, что существует два элемента $x_0, y_0 \in X$, такие, что $Ax_0 = x_0$, $Ay_0 = y_0$. Тогда $\rho(x_0, y_0) = \rho(Ax_0, Ay_0) \le \alpha\rho(x_0, y_0)$. Если допустить, что $\rho(x_0, y_0) > 0$, то из предыдущего следует, что $1 \le \alpha$, а это невозможно в силу условия $\alpha < 1$. Отсюда $\rho(x_0, y_0) = 0$, т. е. $x_0 = y_0$. ►

1.6. Дифференцирование

Перед тем, как перейти к рассмотрению решений дифференциальных уравнений, введем понятия дифференцирования в линейных нормированных пространствах, а также понятия неопределенного и определенного интегралов, включая интеграл от абстрактных функций.

Определение. *Пусть X и Y — линейные нормированные пространства, а G — открытое множество пространства X. Отображение (функция, оператор)* $f: G \to Y$ *называется* ***дифференцируемым по Фреше́*** *в точке* $x \in G$, *если существует непрерывный линейный оператор* $A_x: X \to Y$, *такой, что для любого элемента* $h \in X$, *удовлетворяющего условию* $x + h \in G$,

$$\Delta f = f(x+h) - f(x) = A_x h + \omega(x, h),$$

где $\dfrac{\|\omega(x,h)\|_Y}{\|h\|_X} \to 0$ при $\|h\|_X \to 0$.

Главная часть $A_x h$ приращения Δf, линейно зависящая от h, называется *дифференциалом Фреше* отображения f в точке x и обозначается $df(x,h)$, а выражение $\omega(x,h)$ называется *остатком приращения.*

Итак, $df(x,h) = A_x h$ и приращение Δf оператора записываются в виде

$$\Delta f = f(x+h) - f(x) = df(x,h) + \omega(x,h),$$

где

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|\omega(x,h)\|_Y}{\|h\|_X} = \lim_{h\to 0}\frac{\|f(x+h) - f(x) - df(x,h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0.$$

Определение. *Линейный оператор* A_x *называется* ***производной Фреше*** *отображения f в точке x и обозначается* $f'(x)$. *Таким образом,* $df(x,h) = f'(x)h$. *Отображение, дифференцируемое в каждой точке множества G, называется* ***дифференцируемым на G***.

Утверждение. *Если f — линейный непрерывный оператор, действующий из X в Y, то для любого элемента* $x \in X$ *имеем* $f'(x) \equiv f$.

◀ В самом деле при всех $h \in X$

$$f(x+h) - f(x) = f(x) + f(h) - f(x) = f(h) = fh = f'h,$$

откуда следует приведенное утверждение $f = f'$. ▶

Производная Фреше является линейным оператором:

$$(\alpha f(x) + \beta g(x))'_{x_0} = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0).$$

Утверждение. *Из равенства*

$$\Delta f = f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \omega$$

следует, что функция f, дифференцируемая в точке x_0, *непрерывна в этой точке.* Покажем, что это так, воспользовавшись определением непрерывности:

◀ $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : \|h\| < \delta, \|\Delta f\| < \varepsilon$.
Тогда

$$\|\Delta f\| \le \|f'(x)h\| + \|\omega(x,h)\| \le \|f'(x)\| \cdot \|h\| + \|h\| =$$
$$= \left(\|f'(x)\| + 1\right)\|h\| < \left(\|f'(x)\| + 1\right)\delta < \varepsilon,$$

где $\delta < \dfrac{\varepsilon}{\|f'(x)\| + 1}$. ▶

Обратное утверждение не верно.

Из сказанного следует, что *дифференцируемость* сводится к возможности линейной аппроксимации приращения нелинейного оператора:

$$\Delta f = f'(x)h + \omega \approx f'(x)h.$$

Для производной Фреше сохраняется свойство *производной сложной функции*, т. е. производной композиции функций,

$$F = g \circ f,$$

что имеет вид композиции производных Фреше g и f соответственно в точках $f(x_0)$ и x_0:

$$F'(x_0) = g'[f(x_0)] \circ f'(x_0).$$

В одномерном случае производная Фреше $f'(x)$ — обычная производная:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Для функции n переменных производная Фреше $f'(x)$ становится градиентом

$$f'(x) = \nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right],$$

а дифференциал $f'(x)h$ — скалярным произведением.

Пусть дано отображение $f : G \to \mathbb{R}^m$, где $G \subset \mathbb{R}^n$ и множество G открыто. Тогда приведенные выше определения дифференцируемости отображения и производной совпадают с определениями дифференцируемости и производной векторной функции векторного аргумента. В этом случае $f'(x)$ — линейный оператор, определяемый *матрицей Якóби*:

$$f'(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right], \ i = 1, \dots, m, \ j = 1, 2, \dots, n,$$

где $f_i(x_1, ..., x_n)$ — координатные функции отображения f.

Если оператор $f'(x)$ дифференцируем по Фреше в точке x, то оператор f называется *дважды дифференцируемым по Фреше в точке* x. Аналогично определяется производная n-го порядка. Тогда оператор $f(x)$ разлагается в ряд Тейлора по схеме классического анализа:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \ \text{ или } \ f(x+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k.$$

1.7. Интегрирование

Определение. *Операция, обратная дифференцированию, называется интегрированием. Функция $F(x)$, такая, что $F'(x) = f(x)$ (равносильно $dF(x) = f(x)dx$), называется* ***первообразной функции*** *$f(x)$, или* ***интегралом*** *от $f(x)$.*

Если $F(x)$ с указанными свойствами существует лишь на отрезке $[a, b]$, то говорят, что функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$.

Если $F(x)$ — первообразная $f(x)$, то и $F(x) + C$ — первообразная $f(x)$, поскольку производная константы C — нуль. Таким образом, первообразная определена с точностью до константы.

Определение. *Совокупность всех первообразных $f(x)$ называется* ***неопределенным интегралом*** *и обозначается*

$$\int f(x)dx.$$

Напомним формулу взятия интеграла по частям, которая будет в дальнейшем использоваться. Возьмем дифференциал от произведения функций $u(x)$ и $v(x)$

$$d(uv) = udv + vdu\,,$$

что равносильно производной от произведения функций. Это можно увидеть, если разделить обе части равенства на дифференциал аргумента dx:

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}, \text{ или } (uv)' = uv' + vu'\,.$$

Проинтегрировав равенство дифференциалов, получим искомую формулу:

$$\int udv = uv - \int vdu\,.$$

Геометрический смысл интеграла. Если $S(x)$ обозначает площадь под графиком $y = f(x)$ криволинейной трапеции в промежутке от некоторого a до текущего значения x (рис. 1.2), то выражение $\dfrac{dS(x)}{dx} = f(x)$ равносильно $dS(x) = f(x)dx$, $dx = \Delta x \neq 0$.

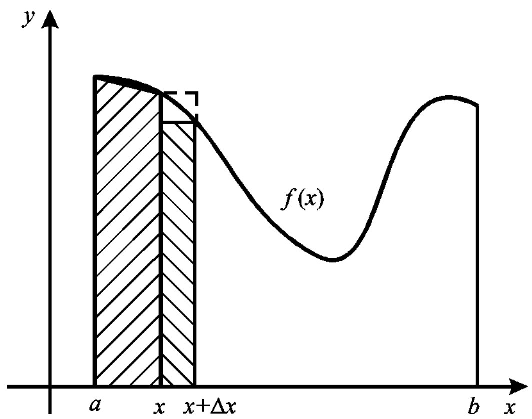

Рис. 1.2. Геометрическая иллюстрация определенного интеграла

Из рис. 1.2 следует формула для приращения площади

$$\Delta S = S(x+\Delta x) - S(x) = f(x)\Delta x + o(\Delta x),$$

что приводит к равенству

$$S'(x) = f(x).$$

Здесь в первом соотношении величина $o(\Delta x)$ имеет более высокий порядок малости по сравнению с Δx, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0$.

Таким образом, площадь $S(x)$ под графиком $y = f(x)$ — это первообразная функции $f(x)$. От любой другой первообразной $F(x)$ функция $S(x)$ отличается на постоянную величину, поэтому всегда

$$S(b) - S(a) = F(b) - F(a).$$

Определение [13]. *Разность* $F(b) - F(a)$, *где* $F(x)$ — *первообразная* $f(x)$, *называется* ***определенным интегралом*** *функции* $f(x)$ *в промежутке от a до b и обозначается как*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

В учебной литературе по математике эта формула называется *формулой Ньютона — Лейбница.*

В случае переменного верхнего предела интегрирования

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a) \Rightarrow F'(x) = f(x),$$

$$\frac{d}{dx}\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt = \frac{d}{dx}[F(\varphi(x)) - F(a)] = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

В определении определенного интеграла понятие площади не было строго определено, поэтому оно не стандартно.

Стандартное определение опирается на другую схему. Промежуток $[a,b]$ разбивается на n отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, где $x_0 = a, x_n = b$.

На каждом i-м отрезке выбирается произвольная точка ξ_i и рассматривается сумма

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Эквивалентное определение определенного интеграла. *Предел суммы σ при стремлении к нулю максимальной длины Δx_i называется **определенным интегралом** $f(x)$ от a до b и обозначается*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_i \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Из данного определения вытекает свойство аддитивности:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Уточнение требует существования предела, а также его независимости от характера стремления Δx_i к нулю и от выбора точек ξ_i. С этой целью на каждом промежутке $[x_i, x_{i+1}]$ берутся точная нижняя m и точная верхняя M границы $f(x)$ и вводится в рассмотрение *нижняя и верхняя суммы Дарбу*:

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i , \qquad S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i .$$

В силу $s \le \sigma \le S$, так как $m_i \le f(\xi_i) \le M_i$, имеет место теорема.

Теорема. *Для существования определенного интеграла необходимо и достаточно, чтобы $S - s \to 0$ при $n \to \infty$, $\max\limits_i \Delta x_i \to 0$.*

Теорема [13]**.** *Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует.*

◄ Для доказательства существования интеграла используется теорема Кантора: *если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она равномерно-непрерывна на $[a,b]$.*

Определение. *Функция* $f(x)$, *непрерывная на некотором множестве X, называется* ***равномерно-непрерывной*** *на X, если по любому числу* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое число* δ, *что* $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, *если* $|x - y| < \delta$ *для любых* $x, y \in X$.

Для нашего случая по любому числу $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta > 0$, что $\Delta x_i < \delta \Rightarrow M_i - m_i < \varepsilon$. Отсюда

$$S - s = \sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)\Delta x_i < \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i = \varepsilon(b - a),$$

что дает $S - s \to 0$. Это означает, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер *N*, превышение которого ($n > N$) обеспечивает $S - s < \varepsilon$. ►

В случае конечного числа конечных разрывов (*кусочная непрерывность*) функции $f(x)$ верхняя и нижняя суммы Дарбу также совпадают: $\lim\limits_{n\to\infty}(S - s) = 0$, поскольку

$$\int_a^b = \int_a^{c_1} + \ldots + \int_{c_i}^{c_{i+1}} + \ldots + \int_{c_n}^b,$$

где c_i — точки разрыва.

Если рассмотреть интеграл $\Phi(x)$ как функцию верхнего предела,

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

то имеем

$$\Delta\Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(\xi)\Delta x + o(\Delta x),$$

где $\xi \in [0, \Delta x]$, что приводит к $\Phi'(x) = f(x)$, т. е. Φ — первообразная:

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[f(\xi) + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right] = f(x).$$

Это устанавливает эквивалентность определений определенного интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(x)|_a^b \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sigma = \int_a^b f(x)dx.$$

В случае существования интеграла $\int_a^b f(x)dx$ в указанном выше смысле (см. эквивалентное определение определенного интеграла) функция $f(x)$ называется *интегрируемой по Риману*, а сам интеграл — *интегралом Римана*.

Абстрактные функции [9]**.** Предположим, что к числовой прямой сводится пространство аргументов *X*. Отображение $F(x)$, сопоставляющее числу *x* элемент некоторого банахова пространства *Y*, называется *абстрактной функцией*.

Пусть *F* — абстрактная функция действительного аргумента *t* со значениями в банаховом пространстве *Y*. Если *F* задана на отрезке $[a, b]$, то можно определить интеграл функции *F* по отрезку $[a, b]$. Этот интеграл понимается как предел интегральных сумм

$$\sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)(t_{k+1} - t_k),$$

отвечающих разбиению

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b, \ \xi_k \in [t_k, \ t_{k+1}],$$

при условии, что $\max(t_{k+1} - t_k) \to 0$. Интеграл, представляющий собой элемент из *Y*, обозначается так:

$$\int_a^b F(t)dt.$$

Можно показать, что *интеграл от абстрактной функции*, непрерывной на отрезке, существует и обладает свойствами обычного интеграла Римана. Среди этих свойств отметим следующие:

1) если *U* — фиксированное линейное непрерывное отображение пространства *Y* в некоторое пространство *Z*, то

$$\int_a^b UF(t)dt = U\int_a^b F(t)dt;$$

2) если $F(t)$ имеет вид $f(t)y_0$, где $f(t)$ — числовая функция, а y_0 — фиксированный элемент из Y, то

$$\int_a^b F(t)dt = y_0 \int_a^b f(t)dt;$$

3) оценка нормы интеграла имеет вид

$$\left\| \int_a^b F(t)dt \right\| \le \int_a^b \|F(t)\| dt.$$

1.8. Решение дифференциальных уравнений

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений являются основным инструментом описания математических моделей управляемых систем. Динамические нелинейные модели в общем случае можно представить дифференциальным уравнением вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1.2}$$

где x и $f(t,x)$ — элементы банахова пространства X и $t \in [a,b]$.

Для доказательства теоремы существования и единственности решения уравнения (1.2) используется *принцип сжимающих отображений* [8 – 10].

◄ Будем предполагать, что функция $f(t,x)$ непрерывна по t и как функция x удовлетворяет условию Липшица

$$\| f(t,x_1) - f(t,x_2) \| \le L \|x_1 - x_2\|.$$

Обозначим через $C^X[a,b]$ пространство всех непрерывных функций $x(t)$, где $x(t) \in X$ и $t \in [a,b]$. В пространстве $C^X[a,b]$ введем норму

$$\|x\|_C = \max_t \|x(t)\|.$$

Можно показать с использованием данной нормы, что пространство $C^X[a,b]$ является полным. Проинтегрировав исходное дифференциальное уравнение, перейдем к эквивалентному интегральному уравнению

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x, \tau)\, d\tau,$$

где $a \le t_0 \le t \le t_0 + \delta \le b$.

Это уравнение позволяет рассматривать отображение банахова пространства в себя. Правая часть уравнения есть оператор A, отображающий $x(t)$ из $C^X[t_0,\ t_0+\delta]$ в себя. Применим принцип сжимающих отображений, тогда

$$\|A[x(t)] - A[y(t)]\| =$$
$$= \left\| \int_{t_0}^{t} \{ f[\tau, x(\tau)] - f[\tau, y(\tau)] \}\, d\tau \right\| \le \int_{t_0}^{t_0+\delta} \|f[\tau, x(\tau)] - f[\tau, y(\tau)]\|\, d\tau.$$

Поскольку функция $f(t, x)$ удовлетворяет условию Липшица, получим

$$\|A[x(t)] - A[y(t)]\| \le$$
$$\le L \int_{t_0}^{t_0+\delta} \|x(\tau) - y(\tau)\|\, d\tau \le L\delta \max_t \|x(t) - y(t)\| = L\delta \|x - y\|.$$

Если $L\delta < 1$, то оператор A является сжимающим оператором при отображении пространства $C^X[t_0,\ t_0+\delta]$ в себя. Поэтому существует единственное решение интегрального уравнения $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x, \tau)\, d\tau$, которое равносильно дифференциальному уравнению $\dfrac{dx}{dt} = f(t, x)$ при начальном значении $x(t_0) = x_0$. Следовательно, $\dfrac{dx}{dt} = f(t, x)$ имеет единственное решение на отрезке $[t_0,\ t_0+\delta]$, такое, что $x(t_0) = x_0$. Теорема существования и единственности решения $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ доказана для некоторого числа δ, что показывает ее локальный смысл. В общем случае данное решение можно продолжить на весь отрезок $[a,\ b]$. ►

1.9. Обобщенные функции

К введению обобщенных функций приводят описания плотностей распределения каких-либо субстанций, когда они сосредоточены в одной точке. Такой задачей, например, является распределение плотности, созданной точечной массой (или распределение электрического заряда, созданного точечным зарядом). Физической аналогией является расположение гирьки на струне (рис. 1.3). Тогда если расположить струну по горизонтальной координате x, а массу $M = 1$ поместить в начало координат, то плотность массы в любой точке, кроме нуля, будет вычисляться по формуле

$$\rho(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{2\Delta x} = 0 .$$

В начале координат плотность будет равна бесконечности,

$$\rho(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{2\Delta x} = +\infty .$$

По плотности должна восстанавливаться масса (рис. 1.4):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)\, dx = 1 ,$$

но интегрирование здесь математически незаконно, поскольку $\rho(x)$ — необычная функция. Интеграл от обычной функции не зависит от значений функции в одной точке, даже на множестве меры нуль.

В данном случае не работает механизм соответствия, по которому строятся, например, числовые функции числового аргумента, из-за поведения δ-функции в рассматриваемой задаче — плотности точечной массы $\rho(x)$. Поэтому математиками было предложено записывать функции как функционалы на некотором удобном пространстве функций, что позволило избавиться от неудобства интегрирования δ-функции [9, 10, 19].

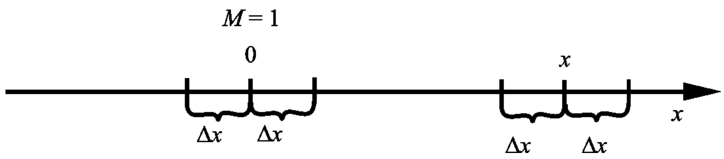

Рис. 1.3. Физическая аналогия распределения плотности точечной массы

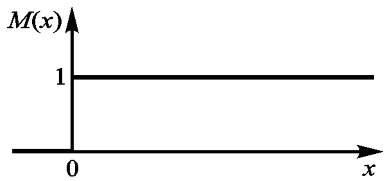

Рис. 1.4. Восстановление массы по ее плотности

Определение. *Пусть* $x = [x_1, \ldots, x_n] \in \mathbb{R}^n$, $|x| = \sqrt{\sum x_i^2}$. *Функция* $\varphi(x)$ *называется* ***финитной****, если существует* ρ_φ, $0 < \rho_\varphi < \infty$, *такое, что* $\varphi(x) = 0$ *для любого* $x, |x| \geq \rho_\varphi$.

Определение. *Функция* $\varphi(x)$ *называется* ***основной****, если она финитна и бесконечно дифференцируема.*

Совокупность основных функций обозначается через D. Иногда пишут $D(\mathbb{R}^n)$. Замыкание области, где $\varphi(x) \neq 0$, называется *носителем* $\varphi(x)$ и обозначается как $\operatorname{supp}\varphi$. Разные функции из D могут иметь разные носители, т. е. могут быть отличны от нуля в разных областях, и каждая функция $\varphi(x)$ может иметь свой носитель.

Сходимость в D. *Последовательность* $\varphi_n \subset D$ *сходится к* φ, *если объединение всех носителей,*

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{supp}\varphi_n ,$$

ограничено и производные $\varphi_n^{(k)}(x)$ *любого фиксированного порядка k сходятся к* $\varphi_n^{(k)}(x)$ *равномерно на* Ω.

Основные функции можно складывать друг с другом и умножать на вещественные числа, причем снова будут получаться основные функции. Таким образом, совокупность D есть линейное пространство.

Определение. *Обобщенной функцией называется* ***линейный непрерывный функционал*** *на пространстве D, т. е. указано правило, в силу которого с каждой основной функцией* $\varphi(x)$ *сопоставлено некоторое вещественное число* (f, φ).

Вещественное число (f, φ) есть значение функционала f на элементе φ. При этом выполнены условия:
линейности

$$(f, k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2) = k_1(f, \varphi_1) + k_2(f, \varphi_2)$$

и непрерывности

$$\left\{ \varphi_m \underset{m\to\infty}{\overset{D}{\to}} \varphi \right\} \Rightarrow (f, \varphi_m) \underset{m\to\infty}{\overset{\mathbb{R}}{\to}} (f, \varphi).$$

Здесь $\varphi_m \to \varphi$ означает введенную в D сходимость.

Обозначение. *Совокупность обобщенных функций обозначается через* D' *(или* $D'(\mathbb{R}^n)$*).*

Введем в пространстве обобщенных функций D' операцию предельного перехода. Мы скажем, что последовательность обобщенных функций $\{f_n\}$ сходится к f, если для каждого $\varphi \in D$ выполнено соотношение

$$(f_n, \varphi) \to (f, \varphi).$$

Иными словами, сходимость последовательности обобщенных функций определим как сходимость на каждом элементе из D, т. е. как поточечную сходимость на пространстве основных функций D.

Обобщенную функцию можно задать в виде функционала $f \in D'$ для любого $\varphi \in D$ следующим образом:

$$(f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} F(x)\,\varphi(x)dx,$$

где $F(x)$ — всякая интегрируемая функция на любом конечном множестве, принадлежащем $\mathbb{R}^n$, которая порождает обобщенную функцию.

Можно проверить, что для функционала *f* условия линейности и непрерывности выполнены. В частности, выполнение условия непрерывности вытекает из возможности перехода к пределу под знаком интеграла в случае равномерной сходимости подынтегральных функций в ограниченной области пространства $\mathbb{R}^n$.

Обобщенные функции, задаваемые формулой $(f, \varphi) = \int F(x)\varphi(x)dx$, называются *регулярными*. Обобщенные функции, не являющиеся регулярными, называются *сингулярными*. Примером сингулярной обобщенной функции является δ-*функция* (*функция Дирака*), действие которой на пространстве *D* определяется так:

$$\big(\delta(x), \varphi(x)\big) = \varphi(0), \quad \big(\delta(x - x_0), \varphi(x)\big) = \varphi(x_0) \ \ \forall \varphi \in D .$$

Пусть задана обычная локально интегрируемая функция f и $\psi \in D$. Тогда *сверткой f* с ψ называется функция от x

$$(f * \psi)(x) \triangleq \int f(y)\psi(x - y)\, dy .$$

Здесь подразумевается, что интеграл берется по всему $\mathbb{R}^n$, хотя на самом деле он берется по конечному множеству, так как $\psi \in D$. Свертка обобщенной функции с основной определяется следующим образом:

$$(f * \psi)(x) \triangleq \big(f, \psi(x - y)\big)_y .$$

При этом относительно свертки δ-функция играет роль единицы.

Пусть $f = \delta,\ \psi \in D$, тогда

$$(\delta * \psi)(x) = \big(\delta, \psi(x - y)\big)_y = \psi(x - y)_{y=0} = \psi(x) .$$

Можно вывести правило дифференцирования обобщенной функции при условии, что интегрирование проводится на действительной оси, т. е.

$$(f', \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} F'(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dF(x) =$$

$$= F(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)F(x)dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\varphi'(x)dx.$$

Здесь при интегрировании по частям было учтено, что $\varphi(x)$ — финитная функция, которая равна нулю на бесконечности. В результате имеем

$$(f', \varphi) = (f, -\varphi') = -(f, \varphi').$$

Пусть задана *ступенчатая функция* вида

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

Эта функция называется *функцией Хевисайда* и определяет линейный функционал вида

$$(f, \varphi) = \int_0^{\infty} \varphi(x)dx.$$

В соответствии с определением производной обобщенной функции получим производную функции Хевисайда

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi') = -\int_0^{\infty} \varphi'(x)dx = -\varphi(x)\Big|_0^{\infty} = \varphi(0) = (\delta, \varphi),$$

поскольку φ обращается в нуль на бесконечности. Следовательно, $f' = \delta$, т. е. производная функции Хевисайда есть δ-функция.

Общее правило *дифференцирования свертки* устанавливается соотношением

$$(f * g)' = (f' * g) = (f * g').$$

В теории обобщенных функций решение линейных дифференциальных уравнений [10]

$$Lx(t) = f(t),$$

где $Lx = x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}x' + a_n x$, основывается на фундаментальном решении, удовлетворяющем уравнению

$$Lx(t) = \delta(t).$$

Если $\hat{x}(t)$ — фундаментальное решение, то решение $Lx = f$ получается сверткой $\hat{x}(t)$ с правой частью $f(t)$, поскольку

$$L(\hat{x} * f) = (L\hat{x} * f) = (\delta * f) = f.$$

Так как свертку можно дифференцировать, то дифференциальный оператор L можно вводить в свертку, что и было сделано в предыдущей формуле.

Выводы

• Начало главы посвящено определению понятия оператора (отображения) f, содержательным смыслом которого является перевод элемента одного множества X в элемент другого множества Y по определенному правилу единственным образом:

$$f : X \to Y.$$

Это понятие важно для понимания физического смысла передаточной функции как базового понятия теории линейных систем, в котором передаточная функция может быть оператором тогда, когда равны нулю начальные условия.

• Введение понятий метрических, линейных векторных пространств, нормированных и банаховых пространств является начальным и необходимым шагом к пониманию теории линейных моделей и теории систем управления, так как в этой теории основными объектами исследования являются векторы, матрицы, сигналы и системы, которые образуют соответствующие пространства со своими математическими свойствами и особенностями.

• Линейные операторы в линейных нормированных пространствах дают возможность описать линейные модели и оценить их размеры как максимальные коэффициенты усиления (растяжения) при действии операторов на векторы из соответствующего пространства с помощью понятия нормы $\|A\|$ линейного оператора A:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

• Теорема о существовании линейного обратного оператора

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

позволяет увидеть в общей теореме функционального анализа представление матричной передаточной функции линейной системы в виде матричного ряда.

• Теорема о возмущенном обратном линейном операторе $B^{-1} = (A + \Delta A)^{-1}$ дает возможность сделать оценку нормы разности возмущенного обратного оператора и исходного обратного оператора

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \frac{\|\Delta A\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\|} \|A^{-1}\|^2$$

при условии знания границы изменения размера возмущения оператора

$$\|\Delta A\| < \|A^{-1}\|^{-1} = \frac{1}{\|A^{-1}\|}.$$

Таким образом, данная теорема говорит о робастном качестве обратного оператора при его возмущении, что также связывается с робастными свойствами передаточных функций.

• Резольвентный оператор (резольвента) — это оператор, зависящий от параметра

$$R(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1},$$

который позволяет найти решение операторного уравнения $(A - \lambda I)x = y$ в виде $x = R(\lambda)y$ и фактически является основой передаточных функций, которые связывают выходной сигнал линейной модели с начальными условиями и входными сигналами. Резольвента удовлетворяет тождеству Гильберта

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\lambda - \mu)R(\lambda)R(\mu).$$

• Спектральный радиус $\rho(A)$ линейного оператора A ограничен его нормой

$$\rho(A) \le \|A\|,$$

где $\rho(A)$ — радиус минимального круга, содержащего весь спектр $\sigma(A)$, под спектром понимаются все нерегулярные значения оператора A. (Регулярное значение — это то значение λ, при котором уравнение $(A-\lambda I)x = y$ имеет решение.) Данное утверждение следует из условия сходимости ряда Неймана

$$R(\lambda) = (A-\lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\left(I-\frac{A}{\lambda}\right)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\lambda^k}.$$

При этом важна оценка о возможном диапазоне изменения регулярного значения. Если λ — регулярное значение, то и $\lambda+\Delta\lambda$ при $|\Delta\lambda| < \left\|(A-\lambda I)^{-1}\right\|^{-1}$ также есть регулярное значение.

• Если A, B, C — матрицы линейной системы, а K — матрица обратной связи по состоянию, то решение проблемы управления спектром матрицы должно удовлетворять условию

$$\rho(A-BKC) \le \|A-BKC\|$$

в соответствии с теоремой об ограниченности спектрального радиуса $\rho(A) \le \|A\|$.

• Принцип сжимающих отображений играет фундаментальную роль в теории дифференциальных уравнений и теории нелинейных систем: любое сжимающее отображение $\rho\big(A(x), A(y)\big) \le \alpha\rho(x, y)$ полного метрического пространства (X,ρ) имеет единственную неподвижную точку $Ax_0 = x_0$. Данный принцип является основой метода точечных отображений, позволяет, в частности, анализировать и находить периодические решения нелинейных уравнений автоколебательных систем.

• Производная Фреше как линейный оператор A_x в выражении главной линейной части A_xh в приращении Δf нелинейного оператора

$$\Delta f = f(x+h) - f(x) = A_xh + \omega(x,h)$$

является эффективным инструментом при линеаризации нелинейных дифференциальных уравнений моделей динамических систем и позволяет выделять линейную часть дифференцируемых функций правых частей уравнений в малых окрестностях рабочих режимов моделей систем. В зависимости от вида дифференцируемых функций производная Фреше может быть обыкновенной производной действительной функции действительного аргумента, градиентом действительной функции векторного аргумента или матрицей Якоби при дифференцировании вектор-функции векторного аргумента.

• Интеграл Римана играет ключевую роль при интегрировании функций времени (сигналов), существующих в реальных системах, и может быть определен как предел верхней и нижней сумм Дарбу. Определение интеграла от абстрактной функции дает возможность доказать локальную теорему существования и единственности с помощью принципа сжимающих отображений для дифференциального уравнения вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t), \; x(0) = x_0,$$

где x и $f(t, x)$ — элементы банахова пространства.

• Раздел по обобщенным функциям имеет фундаментальное значение при нахождении преобразования Лапласа от δ-функции, отыскании решений дифференциальных уравнений во временной области для получения выражений весовых (импульсных переходных) функций динамических систем, корректном пользовании интегралами свертки и т. п., исследовании линейных моделей систем как в переменных «вход — выход», так и в пространстве состояний. Обобщенные функции определяются как линейные непрерывные функционалы, заданные на пространстве основных функций D, т. е. финитных и бесконечно дифференцируемых. Регулярные функции f задаются в виде

$$(f, \varphi) = \int F(x)\varphi(x)dx \quad \forall\varphi \in D,$$

где $F(x)$ — всякая интегрируемая функция на любом конечном множестве, а функция Дирака $\delta(t)$ как функция сингулярная (особенная) определяется в виде

$$\bigl(\delta(x), \varphi(x)\bigr) = \varphi(0)$$

для любого $\varphi \in D$.

Решением x операторного уравнения

$$Lx(t) = f(t)$$

в теории обобщенных функций, где L — полином от оператора дифференцирования, $p = d/dt$, является свертка фундаментального решения $\hat{x}$ уравнения

$$Lx(t) = \delta(t)$$

с правой частью $f(t)$:

$$x = (\hat{x} * f).$$

Получение последнего соотношения аналогично вычислению выходного сигнала линейной динамической системы посредством свертки ее входа и весовой функции как фундаментального решения.