

3. ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ СИСТЕМ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

3.1. Термины

Пространство состояний — конечномерное пространство, которому принадлежит вектор состояния обыкновенного дифференциального уравнения в форме Коши.

Линеаризация — выделение из векторного дифференциального уравнения в форме Коши линейной части с помощью матриц Якоби (производных Фреше) при малых отклонениях относительно выбранной (номинальной, рабочей) траектории «вход — состояние».

Переходная матрица состояния — фундаментальная матрица решений векторного линейного однородного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами, которая позволяет перейти из начального состояния в любое другое в пространстве состояний.

Матричная экспонента — переходная матрица состояния вида e^{At} для линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами $\dot{x} = Ax$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Формула Коши — частное решение векторного линейного неоднородного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами в виде интеграла от произведения переходной матрицы состояния и функции в правой части уравнения.

Преобразование подобия — переход к другому базису в пространстве состояний линейного векторного дифференциального уравнения посредством невырожденной замены координат, при которой передаточная функция системы остается неизменной.

Масштабирование — приведение входных и выходных сигналов модели системы к безразмерному виду, когда модуль каждого масштабированного скалярного сигнала не превышает единицы.

3.2. Уравнения модели «вход — состояние — выход»

В этой главе основным объектом исследования являются линейные *стационарные* системы, которые описываются линейными дифференциальными уравнениями в переменных состояния:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, & x(t_0) &= x_0, \\ y &= Cx + Du. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$ называется *вектором состояния* (или состоянием), $x(t_0)$ — *начальным состоянием* системы, $u \in \mathbb{R}^m$ — *входом* системы, $y \in \mathbb{R}^p$ — *выходом* системы. Матрицы A , B , C и D имеют соответствующую размерность и являются матрицами с постоянными коэффициентами. Модели вида (3.1) также называются моделями «вход — состояние — выход», или *внутренними моделями*.

Рассматриваемые многомерные динамические линейные модели в пространстве состояний получаются во многих случаях линеаризацией исходных дифференциальных уравнений, описывающих процессы в многомерных нелинейных управляемых объектах. В начале данной главы покажем, как уравнения вида (3.1) могут быть получены процедурой линеаризации нелинейной системы дифференциальных уравнений, записанных в форме Коши. Затем для того, чтобы достаточно глубоко понимать свойства решения (3.1), приведем некоторые сведения из теории линейных дифференциальных уравнений и рассмотрим ряд свойств линейных моделей в пространстве состояний.

3.3. Линеаризация модели в пространстве состояний

Линейные модели могут быть получены на основании физических законов, на основании анализа входных и выходных данных объекта, а также с использованием комбинации этих двух подходов. Получение линеаризованной модели из полной физической модели объекта обычно сводится к следующим этапам.

1. Формализация нелинейной физической модели в пространстве состояний.

2. Задание траектории или стационарной рабочей точки, относительно которой должна проводиться линейризация.

3. Введение переменных отклонения и линейризация нелинейной модели.

Линейризация сводится к следующей процедуре:

а) разложению правых частей уравнения в ряд Тейлора, в котором пренебрегаются члены второго порядка и выше,

б) введению переменных отклонения,

в) вычитанию номинального решения, относительно которого проводилась линейризация, для того, чтобы ликвидировать члены номинального режима.

Рассмотрим общий случай, когда нелинейная стационарная модель объекта описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f[x(t), u(t)], \\ y(t) &= g[x(t), u(t)],\end{aligned}\tag{3.2}$$

где $x, f \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y, g \in \mathbb{R}^p$. Здесь первое уравнение «вход — состояние» записано в форме Коши: в левой части стоит производная вектора состояния x , а в правой части — дифференцируемая вектор-функция f от вектора состояния x и вектора входного воздействия u . Второе уравнение — это уравнение «вход — состояние — выход», в левой части которого находится выходной сигнал модели объекта y , а в правой части — дифференцируемая вектор-функция g от x и u .

Пусть $x^0(t), u^0(t)$ есть рабочая (номинальная) точка нелинейной системы n -го порядка, относительно которой проводится линейризация. Следует отметить важное обстоятельство, что рабочая точка $x^0(t), u^0(t)$ нестационарна, так как она зависит от времени t и описывает некоторую траекторию в координатах $[x(t), u(t)]$, где время t является параметром. В данном случае траектория задается параметрически. При этом линейризация проводится в каждый момент времени t , а необязательно в точках равновесия управляемой системы, в которых производная вектора состояния равна нулю: $\dot{x}(t) = 0$.

Предположим, что в результате некоторого возмущения входное воздействие $u(t)$, состояние $x(t)$ и выходной сигнал $y(t)$ по-

лучают отклонения $\delta u(t)$, $\delta x(t)$, $\delta y(t)$ от номинальных значений $u^0(t)$, $x^0(t)$, $y^0(t)$ в какой-то момент времени t , тогда

$$\begin{aligned} u(t) &= u^0(t) + \delta u(t), \\ x(t) &= x^0(t) + \delta x(t), \\ y(t) &= y^0(t) + \delta y(t). \end{aligned}$$

Введем обозначения, связанные с дифференцированием состояния номинального режима и отклонением относительно него:

$$\frac{d}{dt} [x^0(t) + \delta x(t)] = \frac{dx^0(t)}{dt} + \frac{d\delta x(t)}{dt} = \dot{x}^0(t) + \delta \dot{x}(t).$$

Пользуясь понятием производной Фреше, которая в данном случае будет представлять собой матрицы Якоби $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial u}$ (см. подразд. 1.6), т. е. производные вектор-функции f по векторам x и u , выделим линейную часть в уравнении состояния (3.2):

$$\begin{aligned} &\underbrace{\dot{x}^0(t)}_{\text{Номинальный режим}} + \delta \dot{x}(t) = \\ &= \underbrace{f(x^0(t), u^0(t))}_{\text{Номинальный режим}} + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^0, u^0} \delta x(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x^0, u^0} \delta u(t) + o(\delta x(t), \delta u(t)). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Принимая во внимание исходное уравнение (3.2), имеем дифференциальное соотношение в рабочей точке (номинальном режиме), где проводится линеаризация,

$$\dot{x}^0(t) = f[x^0(t), u^0(t)].$$

Это соотношение позволяет выполнить сокращения в обеих частях уравнения (3.3) и записать линейную часть данного уравнения в отклонениях:

$$\delta \dot{x}(t) = A[x^0(t), u^0(t)] \delta x(t) + B[x^0(t), u^0(t)] \delta u(t).$$

Здесь матрицы Якоби A , B зависят от текущих координат рабочей точки $x^0(t)$, $u^0(t)$, в которой проводится линеаризация:

$$A[x^0(t), u^0(t)] = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^0, u^0}, \quad B[x^0(t), u^0(t)] = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x^0, u^0}.$$

В покомпонентной записи матрицы Якоби имеют вид

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^0, u^0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x^0, u^0},$$

$$B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x^0, u^0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{x^0, u^0}.$$

Матрицы Якоби A , B вычисляются для системы функций и в общем случае представляют собой прямоугольные матрицы. Число строк этих матриц равно числу функций в системе, а число столбцов — числу компонент векторных аргументов x и u . Если матрица Якоби квадратная, то ее определитель называется *якобианом*.

Аналогично можно с помощью дифференциала Фреше выделить линейную часть во втором уравнении (3.2), которое связывает вектор выходных сигналов y с векторами состояний x и входных воздействий u , и записать это уравнение в виде

$$\underbrace{y^0}_{\text{Номинальный режим}} + \delta y = g(x^0 + \delta x, u^0 + \delta u) =$$

$$= \underbrace{g(x^0, u^0)}_{\text{Номинальный режим}} + \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{x^0, u^0} \delta x + \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{x^0, u^0} \delta u + o(\delta x, \delta u).$$

Это приводит к линеаризованному уравнению «вход — состояние — выход»

$$\delta y = C\delta x + D\delta u,$$

где C, D — матрицы Якоби:

$$C = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{x^0, u^0}, \quad D = \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{x^0, u^0}.$$

В итоге можно сказать, что если нелинейные функции в правых частях уравнений (3.2) модели объекта дифференцируемы в окрестности точки (x^0, u^0) , то с помощью матриц Якоби в дифференциалах Фреше проводится линеаризация дифференциальных уравнений. Последние служат линейной аппроксимацией исходных нелинейных уравнений в окрестности рабочей точки (x^0, u^0) . При этом обычно для удобства вместо записи δx используют x , а вместо δu — u . Тогда линеаризованные уравнения состояния записываются так:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned}$$

где под $x(t), y(t)$ понимаются *отклонения* переменных состояния и выходных сигналов от их номинальных значений, а вектор $u(t)$ представляет собой отклонения (вариации) входных воздействий.

Пример 3.1 [28]. Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + \dot{x} + \dot{x}x = u.$$

Сначала составим модель этой системы в переменных состояния. Переменные состояния x_1 и x_2 определим как

$$\begin{aligned} x_1 &= x, \\ x_2 &= \dot{x} = \dot{x}_1, \end{aligned}$$

тогда исходное нелинейное уравнение записывается в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 = f_1(x, u), \\ \dot{x}_2 &= -x_1x_2 - x_2 + u = f_2(x, u). \end{aligned}$$

Получим матрицы Якоби линеаризованной системы уравнений:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x^0, u^0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -x_2 & -x_1 - 1 \end{bmatrix}_{x^0, u^0}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}_{x^0, u^0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Если рабочая точка задана в виде $x^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix}$, u^0 , то линеаризованные уравнения состояния в отклонениях таковы:

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{x}_1 \\ \delta \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -x_2^0 & -x_1^0 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta u,$$

где u_0 отсутствует из-за вычитания номинального режима, или

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}_1 &= \delta x_2, \\ \delta \dot{x}_2 &= (-x_2^0) \delta x_1 + (-x_1^0 - 1) \delta x_2 + \delta u. \end{aligned}$$

Предположим, что рабочая точка задана в виде $x^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $u^0 = 0$. Тогда линеаризованные уравнения запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}_1 &= \delta x_2, \\ \delta \dot{x}_2 &= -2\delta x_2 + \delta u. \end{aligned}$$

Линейные члены, входящие в нелинейные уравнения, появляются в линеаризованных уравнениях без всяких изменений. Это достаточно очевидно, так как если применять описанный метод для линеаризации системы линейных уравнений, то следует ожидать получение тех же самых линейных уравнений. ■

Упражнение 3.1. Решить пример 3.1 линеаризации с помощью команд MATLAB

```
[x,u,y] = trim('NonLinearModel');
linsys = linmod('NonLinearModel')
```

и схемы SIMULINK, приведенной на рис. 3.1.

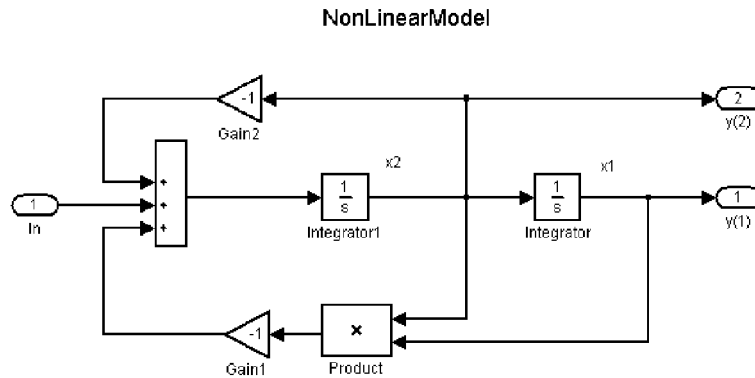


Рис. 3.1. SIMULINK-схема «NonLinearModel» для нахождения точек равновесия и линеаризации системы уравнений:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 x_2 - x_2 + u$$

3.4. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами

Будем рассматривать системы вида

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t)x_k + f_i(t), \quad i=1, \dots, n, \quad a_{ik}(t), f_i(t) \in C(J),$$

где $J = [t_0, t_1]$ — интервал оси t .

Запишем эту систему в векторно-матричном виде:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad (3.4)$$

где $A(t)$ — матрица с элементами $\{a_{ik}(t)\}$, $f(t) = \{f_i(t)\}_1^n$.

Теорема [20 – 22]. *Решение начальной задачи*

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad t \in J, \quad x(t_0) = x_0, \quad A(t), f(t) \in C(J)$$

существует, единственно и продолжаемо на весь интервал J .

Для линейных однородных систем $f(t) = 0$, а начальная задача записывается в виде

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad x(t_0) = x_0. \quad (3.5)$$

По теореме, приведенной выше, решение этой начальной задачи существует, единственно и продолжаемо на весь интервал J . Отсюда следует, в частности, что если решение системы (3.5) равно нулю в некоторой точке $t_* \in J$, то оно тождественно равно нулю на всем интервале J , так как вектор-функция $y(t) \equiv 0$ удовлетворяет (3.5).

Теорема [20 – 22]. Множество всех решений системы (3.5) на интервале J образует n -мерное векторное пространство.

Определение. Всякая система $X(t)$ из n линейно независимых решений системы (3.5), т. е. всякий базис пространства решений системы (3.5), называется **фундаментальной системой решений**, или **фундаментальной матрицей**.

Фундаментальная система решений $X(t)$ уравнения (3.5) состоит из линейно независимых столбцов $x_1(t), \dots, x_n(t)$ — решений (3.5), которые при объединении в таблицу приводят $X(t)$ к виду

$$X(t) = [x_1 \quad \dots \quad x_n] = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{bmatrix}.$$

Напомним, что $x_1(t), \dots, x_n(t)$ называются *линейно зависимыми* на интервале J , т. е. в каждый момент времени этого интервала, если существуют числа β_1, \dots, β_n , $\sum_{i=1}^n \beta_i^2 > 0$, такие, что $\sum_{i=1}^n \beta_i x_i(t) \equiv 0$. В противном случае они *линейно независимы*.

Фундаментальная матрица решений представляет собой невырожденное решение *матричного уравнения*

$$\dot{X} = A(t)X, \quad X(t_0) = X_0, \quad \det X_0 \neq 0,$$

в котором каждый столбец x_i в $X(t)$ является решением соответствующего *векторно-матричного уравнения*

$$\dot{x}_i = A(t)x_i.$$

Решение $X(t)$ является невырожденным, поскольку столбцы $X(t)$ линейно независимы.

Общим решением линейного однородного уравнения, т. е. любым вектором из пространства решений системы (3.5), будет линейная комбинация столбцов фундаментальной матрицы $X(t)$:

$$x(t) = c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t) = X(t)c,$$

где $c = [c_1 \dots c_n]^T$ — произвольный постоянный вектор, $c \in \mathbb{R}^n$.

Линейная независимость столбцов в $X(t)$ нужна, чтобы система линейных алгебраических уравнений для любого начального условия x_0

$$c_1 x_1(0) + \dots + c_n x_n(0) = x_0,$$

или

$$X(0)c = x_0,$$

имела решение. При этом $\det X(t) \neq 0$ для любого $t \in J$, в частности, $\det X(0) \neq 0$.

Определитель любой фундаментальной матрицы называется *определителем Вронского*, который не обращается в нуль ни в одной точке интервала J . Таким образом, столбцы матрицы $X(t)$ в нулевой момент времени линейно независимы и эта линейная независимость сохраняется на всем интервале J .

В общем случае $x(t_0) = X(t_0)c$, тогда $c = X^{-1}(t_0)x(t_0)$, поскольку определитель $X(t)$ не обращается в нуль на интервале J . Поэтому решение начальной задачи $x(t_0) = x_0$ имеет вид

$$x(t) = X(t)c = X(t)X^{-1}(t_0)x_0 = \Phi(t, t_0)x_0.$$

Определение. Матрица

$$\Phi(t, t_0) = X(t)X^{-1}(t_0)$$

называется **переходной матрицей состояния** (переходной матрицей, матрицей перехода), или **матрицей Коши**, которая позволяет перейти от состояния $x(t_0)$ к состоянию $x(t)$ в уравнении (3.5) для всех $t \in [t_0, t_1]$.

Непосредственно из определения вытекают следующие свойства переходной матрицы состояния [33]:

$$1) \Phi(t_0, t_0) = I;$$

$$\blacktriangleleft \Phi(t_0, t_0) = X(t_0)X^{-1}(t_0) = I; \blacktriangleright$$

$$2) \Phi(t, t_0) \neq 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]; t_1 > t_0;$$

$$3) \Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t);$$

$$\blacktriangleleft \Phi^{-1}(t, t_0) = [X(t)X^{-1}(t_0)]^{-1} =$$

$$= [X^{-1}(t_0)]^{-1} [X(t)]^{-1} = X(t_0)X^{-1}(t) = \Phi(t_0, t); \blacktriangleright$$

4) $\Phi(t, t_0) = \Phi(t, t_1)\Phi(t_1, t_0)$ — правило композиции для переходной матрицы состояния;

$$\blacktriangleleft \Phi(t, t_0) = X(t)X^{-1}(t_0) = X(t)X^{-1}(t_1)X(t_1)X^{-1}(t_0) = \\ = \Phi(t, t_1)\Phi(t_1, t_0). \blacktriangleright$$

Правило композиции свидетельствует о том, что из состояния x_0 можно перейти в состояние x либо с помощью линейного преобразования $\Phi(t, t_0)$, либо последовательно применяя два линейных преобразования: сначала $\Phi(t_1, t_0)$, переводящее x_0 в некоторое промежуточное состояние x_1 , а далее преобразование $\Phi(t, t_1)$, переводящее x_1 в требуемое состояние x .

Следует отметить, что переходная матрица состояния — это такая фундаментальная матрица, которая удовлетворяет начальному условию $\Phi(t_0) = I$. Поэтому переходную матрицу состояния можно определить как решение матричного дифференциального уравнения с единичными начальными условиями:

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = I.$$

Пример 3.2. Рассмотрим нестационарную систему

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad A(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{t} & 0 \\ -\frac{2}{t^2} & \frac{2}{t} \end{bmatrix}.$$

Одна из фундаментальных матриц этой системы имеет вид

$$X(t) = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 1 & t^2 \end{bmatrix},$$

а ее производная $\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2t \end{bmatrix}$.

Проверим, что $X(t)$ удовлетворяет исходному уравнению:

$$A(t)X(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{t} & 0 \\ -\frac{2}{t^2} & \frac{2}{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t & 0 \\ 1 & t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{t} + \frac{2}{t} & 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2t \end{bmatrix} = \dot{X}(t).$$

Вычислим переходную матрицу состояния:

$$X^{-1}(t_0) = \begin{bmatrix} t_0 & 0 \\ 1 & t_0^2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{t_0^3} \begin{bmatrix} t_0^2 & 0 \\ -1 & t_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{t_0} & 0 \\ -\frac{1}{t_0^3} & \frac{1}{t_0^2} \end{bmatrix},$$

$$\Phi(t, t_0) = X(t)X^{-1}(t_0) = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 1 & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{t_0} & 0 \\ -\frac{1}{t_0^3} & \frac{1}{t_0^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{t}{t_0} & 0 \\ \frac{1}{t_0} - \frac{t^2}{t_0^3} & \frac{t^2}{t_0^2} \end{bmatrix}.$$

Итак, решение исходного уравнения через переходную матрицу состояния $x(t) = \Phi(t, t_0)x_0$ имеет вид

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{t}{t_0} & 0 \\ \frac{1}{t_0} - \frac{t^2}{t_0^3} & \frac{t^2}{t_0^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix}. \blacksquare$$

Рассмотрим линейную неоднородную систему (3.4):

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \quad x, f \in \mathbb{R}^n, \quad A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \dot{x} = \frac{d}{dt}x.$$

Здесь полезно провести аналогию с решением линейных алгебраических уравнений $Ax = b$. Общее решение такого уравнения состоит из частного решения этого уравнения и элемента x , принадлежащего ядру матрицы A : $x \in \text{Ker } A$, т. е. x удовлетворяет однородному уравнению $Ax = 0$. Решение $Ax = b$ является суммой частного решения x_1 и решения x однородного уравнения. Аналогия видна, если переписать (3.4) в виде

$$(pI - A(t))x(t) = f(t), \quad p = \frac{d}{dt}.$$

Теорема. *Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения (3.4) задается формулой*

$$x(t) = X(t)c + x^*(t),$$

где $X(t)$ — фундаментальная матрица соответствующей однородной системы

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t);$$

$x^*(t)$ — произвольное частное решение системы (3.4); $c \in \mathbb{R}^n$ — произвольный постоянный вектор.

◀ Проверим, что сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения является решением исходного неоднородного уравнения. Для любого $c \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{X}(t)c + \dot{x}^*(t) = \underbrace{A(t)X(t)}_{\dot{x}(t)}c + \underbrace{A(t)x^*(t) + f(t)}_{\dot{x}^*(t)} = \\ &= A(t) \left[\underbrace{X(t)c + x^*(t)}_{x(t)} \right] + f(t) = A(t)x(t) + f(t). \end{aligned}$$

Таким образом, убедились, что предложенное общее решение неоднородного уравнения действительно ему удовлетворяет. ►

Теорема. (Формула Коши) [20 – 22, 27]. *Если $X(t)$ — фундаментальная матрица однородной системы $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, то вектор-функция*

$$x^*(t) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) f(\tau) d\tau = X(t) \int_{t_0}^t X^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau, \quad (t, t_0) \in J$$

является частным решением неоднородной системы $\dot{x} = A(t)x + f(t)$ с начальным условием $x(t_0) = 0$.

◀ Вначале проверим, что $x^*(t)$ удовлетворяет неоднородному уравнению

$$\begin{aligned}\dot{x}^*(t) &= \dot{X}(t) \int_{t_0}^t X^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau + \underbrace{X(t) X^{-1}(t)}_I f(t) = \\ &= A(t) \underbrace{X(t) \int_{t_0}^t X^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau}_{x^*(t)} + f(t) = A(t)x^*(t) + f(t).\end{aligned}$$

Будем искать решение системы (3.4) в том же виде, что и *общее* решение однородной системы (3.4), только считая c функцией t :

$$c = c(t), \quad x(t) = X(t)c(t), \quad c \in C^1(\mathbb{R}^n, J).$$

Такой подход называется *методом вариации произвольных постоянных*. Тогда при подстановке $x(t) = X(t)c(t)$ в (3.4) получим

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{d}{dt} [X(t)c(t)] = \dot{X}(t)c(t) + X(t)\dot{c}(t) = \underbrace{A(t)X(t)}_{\dot{X}(t)} c(t) + X(t)\dot{c}(t) \equiv \\ &\equiv \underbrace{A(t)X(t)c(t)}_{x(t)} + f(t).\end{aligned}$$

При сокращении в обеих частях последнего тождества выражения $A(t)x(t)$ в результате имеем

$$\begin{aligned}X(t)\dot{c}(t) &= f(t) \Rightarrow \dot{c}(t) = X^{-1}(t)f(t), \quad c(t) = \int_{t_0}^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau + c(t_0), \\ x(t) &= X(t)c(t) = X(t) \left[\int_{t_0}^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau + c(t_0) \right] = \\ &= X(t)c(t_0) + X(t) \int_{t_0}^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau =\end{aligned}$$

$$= X(t)X^{-1}(t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t X(t)X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)f(\tau)d\tau.$$

Итак, общее решение неоднородного уравнения (3.4) состоит из суммы общего решения однородного уравнения $y(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0)$ и частного решения $x^*(t)$ — формула Коши. ►

3.5. Матричная экспонента в линейных моделях систем

Вернемся к стационарному уравнению (3.1) и будем вначале рассматривать случай однородного уравнения

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0. \quad (3.6)$$

Это векторно-матричное дифференциальное уравнение, решение которого определяется переходной функцией состояния $\Phi(t, t_0)$ в виде *матричной экспоненты* $\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$:

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) = e^{A(t-t_0)}x(t_0).$$

Здесь решение уравнения $\dot{x}(t) = Ax(t)$ получено формально по аналогии со скалярным случаем однородного дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = ax(t), \quad a, x \in \mathbb{R}, \quad x(t_0) = x_0,$$

когда переменные можно разделить и сразу получить решение:

$$\blacktriangleleft \frac{dx}{dt} = ax, \quad \frac{dx}{x} = adt, \quad \ln|cx| = at,$$

$$cx = e^{at}, \quad cx_0 = e^{at_0}, \quad c = \frac{e^{at_0}}{x_0} \Rightarrow x = \frac{e^{at}}{c} = e^{a(t-t_0)}x_0. \blacktriangleright$$

В матричном случае (3.6) решение получается более сложным методом [22], который позволяет представить матричную экспоненту не в виде ряда, а в виде произведения диагональной матрицы со скалярными экспонентами на диагонали и матриц невырожденного преобразования координат.

◀ Заменяем переменные с помощью некоторой невырожденной матрицы T : $x = Ty$, $\det T \neq 0$. Тогда исходная задача примет вид

$$T\dot{y}(t) = ATy(t), \quad Ty(0) = x_0$$

или после умножения слева обеих частей этого уравнения на T^{-1} будет выглядеть так:

$$\dot{y}(t) = T^{-1}ATy(t), \quad y(0) = T^{-1}x_0.$$

Если собственные значения λ_i матрицы A попарно различны, то столбцы матрицы T могут являться собственными векторами матрицы A , что позволяет привести A к диагональному виду Λ :

$$AT = T\Lambda, \quad \Lambda = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Тогда система $\dot{y}(t) = T^{-1}ATy(t) = \Lambda y(t)$ будет представлять собой совокупность независимых друг от друга скалярных дифференциальных уравнений $\dot{y}_k = \lambda_k y_k$, $k = 1, \dots, n$. Если проинтегрировать эту «развязанную» систему уравнений, то получится набор решений

$$y_k(t) = e^{\lambda_k t} y_k(0), \quad t_0 = 0,$$

который можно записать в векторно-матричном виде:

$$y(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} y(0).$$

Применяя обратное преобразование координат $y = T^{-1}x$, $y(0) = T^{-1}x(0)$, можно вернуться в исходное пространство состояний:

$$x(t) = T \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} T^{-1}x(0).$$

Из последнего уравнения видно определение матричной экспоненты, если считать, что

$$x(t) = \Phi(t)x(0) = e^{At}x(0),$$

где $\Phi(t, 0) = \Phi(t) = e^{At}$ — переходная матрица состояния, позволяющая перейти из состояния $x(0)$ в состояние $x(t)$.

Таким образом, получено понятное матричное соотношение для матричной экспоненты в случае различных собственных значений матрицы A :

$$e^{At} = T \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} T^{-1}. \blacktriangleright$$

По этому соотношению может быть численно найдена матричная экспонента e^{At} . Для этого нужно вычислить набор собственных пар (λ_i, x_i) , $i = 1, \dots, n$, состоящих из собственных векторов и собственных значений, и воспользоваться данным соотношением.

Решение уравнения (3.6) можно получить и для общего случая в виде матричной экспоненты, когда среди собственных значений матрицы A встречаются кратные, двумя методами. Первый метод основан на решении дифференциальных уравнений посредством поиска решения в виде ряда с неизвестными коэффициентами [28]. Этот ряд подставляют в дифференциальное уравнение, получают систему алгебраических уравнений и из них определяют неизвестные коэффициенты.

◀ Пусть решение (3.6) имеет вид

$$x = \Phi(t)x_0.$$

Представим это решение $x(t)$ в виде ряда:

$$x(t) = (K_0 + K_1 t + K_2 t^2 + K_3 t^3 + \dots)x_0 = \sum_{i=0}^{\infty} K_i t^i x_0 = \Phi(t)x_0, \quad (3.7)$$

где все квадратные $(n \times n)$ -матрицы K_i считаются неизвестными, а t — скалярная переменная (время).

Продифференцировав выражение (3.7), найдем

$$\dot{x}(t) = (K_1 + 2K_2t + 3K_3t^2 + \dots)x_0. \quad (3.8)$$

Подставив (3.7) и (3.8) в (3.6), получим

$$(K_1 + 2K_2t + 3K_3t^2 + \dots)x_0 = A(K_0 + K_1t + K_2t^2 + K_3t^3 + \dots)x_0. \quad (3.9)$$

Выполним последовательность операций. Вычислим (3.9) при $t = 0$, затем последовательно продифференцируем (3.9) с подстановкой в результат $t = 0$ и т. д. В итоге получим систему уравнений в виде

$$\begin{aligned} (\underline{K}_1 + 2K_2t + 3K_3t^2 + \dots)x_0 &= A(\underline{K}_0 + K_1t + K_2t^2 + K_3t^3 + \dots)x_0, & K_1 &= AK_0, \\ (\underline{2K}_2 + 6K_3t + \dots)x_0 &= A(\underline{K}_1 + 2K_2t + \dots)x_0, & 2K_2 &= AK_1, \\ (\underline{6K}_3 + \dots)x_0 &= A(\underline{2K}_2 + \dots)x_0, & 3K_3 &= AK_2 \\ & \dots \end{aligned} \quad (3.10)$$

Вычисление (3.7) при $t = 0$ дает результат $x(0) = K_0x_0$, т. е. $K_0 = I$.

Тогда остальные матрицы K_1, K_2, \dots определяются из (3.10) следующим образом:

$$\begin{aligned} K_1 &= A, \\ K_2 &= \frac{A}{2}K_1 = \frac{A^2}{2!}, \\ K_3 &= \frac{A}{3}K_2 = \frac{A^3}{3!}. \\ & \dots \end{aligned}$$

Отсюда следует, что переходная матрица состояния $\Phi(t)$, которая представлена в (3.7) в виде ряда, с учетом вычисленных коэффициентов может быть записана так:

$$\Phi(t) = K_0 + K_1t + K_2t^2 + K_3t^3 + \dots = I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + A^3 \frac{t^3}{3!} + \dots$$

Если сравнить это выражение с разложением в ряд Тейлора скалярной экспоненты

$$e^{at} = 1 + at + a^2 \frac{t^2}{2!} + a^3 \frac{t^3}{3!} + \dots,$$

то по аналогии переходную матрицу состояния $\Phi(t_0)$ можно представить как экспоненциальную функцию матрицы A :

$$\Phi(t) = e^{At}. \blacktriangleright$$

Второй метод нахождения матричной экспоненты связан с переходом к дискретному времени, получением решения разностного уравнения и предельным переходом к решению для возвращения к непрерывному времени исходного уравнения [34].

◀ Итак, рассмотрим систему (3.6) в дискретные моменты времени $t = kh$, $k = 0, 1, 2, \dots$, где h — интервал дискретизации. Аппроксимируем производную $\dot{x}(t)$ по формуле Эйлера:

$$\dot{x}(t) \approx \frac{x(t+h) - x(t)}{h}.$$

Поэтому уравнение (3.6) может быть аппроксимировано так:

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = Ax(t),$$

$$x(t+h) - x(t) = Ahx(t),$$

$$x(t+h) = (I + Ah)x(t), \quad x(0) = x_0.$$

Последнее уравнение — линейное разностное уравнение, решение которого можно найти последовательными подстановками в разностное уравнение получаемых дискретных величин $x(t+h)$ с опережающим аргументом $(t+h)$ в качестве $x(t)$:

$$x(h) = (I + Ah)x_0,$$

$$x(2h) = (I + Ah)x(h) = (I + Ah)^2 x_0,$$

$$\dots$$

$$x(kh) = (I + Ah)^k x_0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Пусть $k \rightarrow \infty$, $h \rightarrow 0$, $t = kh$, $h = t/k$, тогда

$$x(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(I + A \frac{t}{k} \right)^k x_0$$

— замечательный предел по аналогии с замечательным пределом для основания натурального логарифма $e^x = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{k} \right)^k$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(I + \frac{At}{k} \right)^k = e^{At} \Rightarrow x(t) = e^{At} x_0. \blacktriangleright$$

Для матричной экспоненты справедливы свойства, аналогичные скалярной экспоненте [33 – 35]:

$$1) e^{At} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k \frac{A^j t^j}{j!} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} \dots$$

◀ Данное свойство представления матричной экспоненты в виде ряда либо принимается за ее определение, либо выводится, как это было показано выше, как решение уравнения (3.6): $\dot{x}(t) = Ax(t)$, $x(0) = x_0$; ▶

2) $e^0 = I$, где 0 — матричный нуль;

◀ $e^0 = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} 0^k = I$ по определению матричной экспоненты; ▶

3) если $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$, то $e^A = \text{diag}(e^{a_1}, \dots, e^{a_n})$. В частности, если $A = \alpha I$, то $e^A = e^{\alpha I} = e^{\alpha} I$;

$$4) e^{A(t_1+t_2)} = e^{A t_1} e^{A t_2}.$$

◀ Для матриц в общем случае $e^{A+B} \neq e^A e^B$. Для выполнения равенства $e^{A+B} = e^A e^B$ необходимо и достаточно, чтобы матрицы A и B коммутировали, т. е. $AB = BA$. Непосредственным умножением рядов можно убедиться в том, что если $AB = BA$, то $e^{A+B} = e^A e^B$, поскольку каждый из матричных рядов строится как бесконечная сумма степеней матрицы A с числовыми сомножителями. При этом под степенью матрицы понимается результат ее умножения саму на себя по величине целой степени k :

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k \text{ раз}}; \blacktriangleright$$

$$5) (e^{At})^{-1} = e^{-At}, \det e^{At} \neq 0.$$

◀ Если $e^{A+B} = e^A e^B$, то, взяв $B = -A$, получим $e^{A-A} = e^0 = I = e^A e^{-A}$, $e^{-A+A} = e^0 = I = e^{-A} e^A$, т. е. существует обратная матрица $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ для любой (вырожденной или нет) матрицы A ; ▶

$$6) Ae^{At} = e^{At} A.$$

◀ Доказательство следует из определения матричной экспоненты как ряда $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t^k}{k!} \right) A^k$, которое допускает как левое, так и правое умножение; ▶

$$7) \frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At}.$$

◀ Продифференцируем матричный ряд и придем к доказываемому равенству:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (e^{At}) &= \frac{d}{dt} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k \frac{A^j t^j}{j!} \right) = \frac{d}{dt} \left(I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} \dots \right) = \\ &= A + \frac{2A^2 t}{2!} + \frac{3A^3 t^2}{3!} + \dots = A \left(I + \frac{At}{1!} + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots \right) = Ae^{At}; \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

8) неопределенный интеграл от матричной экспоненты $\int e^{At} dt = A^{-1} e^{At} + C$, если A — обратима, а C — некоторая постоянная матрица, а определенный интеграл с пределами 0 и t

$$\int_0^t e^{A\tau} d\tau = A^{-1} (e^{At} - I).$$

В частности, при $t = +\infty$ для устойчивых матриц $\int_0^{\infty} e^{A\tau} d\tau = -A^{-1}$.

◀ Проинтегрируем ряд, представляющий матричную экспоненту:

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{A\tau} d\tau &= \int_0^t \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \tau^k}{k!} \right) d\tau = \int_0^t \left(I + A\tau + \frac{A^2 \tau^2}{2!} + \frac{A^3 \tau^3}{3!} + \dots \right) d\tau = \\ &= \left(I\tau + A^2 \frac{\tau^3}{3!} + A^3 \frac{\tau^4}{4!} + \dots \right)_0^t = A^{-1} A \left(It + A^2 \frac{t^3}{3!} + A^3 \frac{t^4}{4!} + \dots \right) = \\ &= A^{-1} (e^{At} - I). \end{aligned}$$

Проверим справедливость полученного интеграла дифференцированием:

$$\frac{d}{dt}(A^{-1}(e^{At} - I)) = A^{-1} \frac{d}{dt} e^{At} = A^{-1} A e^{At} = e^{At},$$

что приводит к матричной подынтегральной функции e^{At} . ►

Пример 3.3. Вычислим e^Z , где $Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

По определению $e^Z = I + Z + \frac{1}{2!}Z^2 + \dots$, тогда

$$Z^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow Z^k = 0, k \geq 2.$$

Поэтому

$$e^Z = e^{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} = I + Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \blacksquare$$

Применим к (3.6) преобразование Лапласа, тогда

$$sx(s) - x(0) = Ax(s),$$

или

$$(sI - A)x(s) = x_0.$$

Здесь в левой части алгебраического уравнения стоит характеристическая матрица матрицы A , которая является неособенной при всех $s \neq \lambda_i$, где λ_i — характеристические числа (собственные значения) матрицы A . Значит, зависимость вектора состояния $x(s)$ от его начального значения x_0

$$x(s) = (sI - A)^{-1} x_0 = \Phi(s)x_0, \quad \Phi(s) = (sI - A)^{-1}$$

имеет смысл при всех $s \neq \lambda_i$, где $\Phi(s)$ — резольвентный оператор (см. подразд. 1.5), который дает представление решения (3.6) в области изображений по Лапласу.

Поставим задачу увидеть, как обратное преобразование Лапласа от $x(s)$

$$L^{-1}[x(s)] = x(t) = L^{-1}[sI - A]^{-1} x_0, \quad \Phi(t) = L^{-1}[\Phi(s)]$$

может быть представлено во временной области через переходную матрицу состояния, которой является матричная экспонента [34]:

$$L^{-1}[sI - A]^{-1} = e^{At}.$$

◀ Выполним вспомогательные преобразования для передаточной матрицы по начальным условиям $(sI - A)^{-1}$, представив ее в виде ряда:

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= \frac{1}{s}(I - As^{-1})^{-1} = \frac{1}{s}(I + As^{-1} + A^2s^{-2} + A^3s^{-3} + \dots) = \\ &= Is^{-1} + As^{-2} + A^2s^{-3} + A^3s^{-4} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-k-1}, \quad A^0 = I. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались аналогией представления рядом простейшей дроби,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots,$$

которое получается по правилу деления одного многочлена на другой.

Чтобы применить обратное преобразование Лапласа к полученному ряду $L^{-1}\left[\sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-k-1}\right]$, найдем формулу преобразования

Лапласа для степенной функции t^k . Для этого обратимся к рассмотрению оригиналов и изображений, зависящих от параметра.

Пусть функция $f(t, x)$ при каждом фиксированном значении x является оригиналом и ей соответствует изображение

$$F(s, x) = \int_0^{\infty} f(t, x) e^{-st} dt. \quad (3.11)$$

Будем предполагать, что выполнены все условия, при соблюдении которых интеграл (3.11), рассматриваемый как функция параметра x , можно дифференцировать по этому параметру под знаком интеграла [12], тогда

$$\frac{\partial F(s, x)}{\partial x} = \int_0^{\infty} \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} e^{-st} dt.$$

Данное правило дифференцирования интеграла по параметру позволяет сформулировать следующую теорему операционного исчисления.

Теорема (о дифференцировании оригинала по параметру) [25].
Если при любом значении x оригиналу $f(t, x)$ соответствует изображение $F(s, x)$, то

$$L\left[\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}\right] = \frac{\partial F(s, x)}{\partial x}.$$

Применим эту теорему для получения изображений степеней t^k . В подразд. 2.7 было найдено преобразование Лапласа для скалярной экспоненты в виде

$$L[e^{at}] = \frac{1}{s-a}.$$

Здесь параметром является a .

Продифференцировав левую и правую части этого уравнения по параметру a , получим новую формулу:

$$L[te^{at}] = \frac{1}{(s-a)^2}.$$

Продолжение дифференцирования приводит к соответствиям:

$$L[t^2 e^{at}] = \frac{2}{(s-a)^3}, \quad L[t^3 e^{at}] = \frac{3!}{(s-a)^4},$$

и в общем случае

$$L[t^k e^{at}] = \frac{k!}{(s-a)^{k+1}}.$$

Положив $a = 0$, получим

$$L[t] = \frac{1}{s^2}, \quad L[t^2] = \frac{2}{s^3}, \quad L[t^3] = \frac{3!}{s^4}, \dots, L[t^k] = \frac{k!}{s^{k+1}}.$$

Для нашего случая последнее соответствие можно переписать как

$$L\left[\frac{t^k}{k!}\right] = \frac{1}{s^{k+1}}$$

или после обратного преобразования Лапласа так:

$$\frac{t^k}{k!} = L^{-1}\left[\frac{1}{s^{k+1}}\right] = L^{-1}[s^{-k-1}].$$

Тогда в силу свойства линейности преобразования Лапласа получим искомое соотношение для $\Phi(t)$:

$$\begin{aligned} L^{-1}[(sI - A)^{-1}] &= L^{-1}\left[\sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-k-1}\right] = L^{-1}[Is^{-1} + As^{-2} + A^2s^{-3} + A^3s^{-4} + \dots] = \\ &= I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + A^3 \frac{t^3}{3!} \dots = e^{At} = \Phi(t). \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Проще решается прямая задача, т. е. задача непосредственного нахождения преобразования Лапласа от матричной экспоненты с учетом формулы для интегрирования матричной экспоненты:

$$\blacktriangleleft L[e^{At}] = \int_0^{\infty} e^{At} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(A-sI)t} dt = (A-sI)^{-1} e^{(A-sI)t} \Big|_0^{\infty} = (sI - A)^{-1}. \quad \blacktriangleright$$

Пример 3.4. Пусть уравнения состояния модели системы имеют вид

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Найдем переходную матрицу состояния. Из примера 3.3 известно, что $A^k = 0$, $k \geq 2$. Тогда

$$\Phi(t) = e^{At} = I + At = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

В примере 3.4 довольно легко удалось найти переходную матрицу состояния, так как разложение ее в ряд имеет конечное число членов. В общем случае найти сумму членов бесконечного ряда

достаточно трудно. Рассмотрим несколько более сложный пример и для определения переходной матрицы состояния применим обратное преобразование Лапласа к передаточной функции по начальным условиям.

Пример 3.5. Пусть система описывается уравнением

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} x, \quad A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для определения переходной матрицы сначала найдем матрицу $sI - A$:

$$sI - A = s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+3 & -1 \\ 2 & s \end{bmatrix}.$$

Чтобы найти обратную матрицу, сформируем присоединенную матрицу в виде

$$\text{Adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} s & 1 \\ -2 & s+3 \end{bmatrix}$$

и вычислим определитель:

$$\det(sI - A) = s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2).$$

Тогда обратная матрица будет получена путем деления присоединенной матрицы на определитель $\det(sI - A)$:

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= \frac{\text{Adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2} & \frac{1}{s+1} + \frac{-1}{s+2} \\ \frac{-2}{s+1} + \frac{2}{s+2} & \frac{2}{s+1} + \frac{-1}{s+2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Переходную матрицу найдем, применяя обратное преобразование Лапласа:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} -e^{-t} + 2e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & 2e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}. \blacksquare$$

Итак, тремя различными методами было получено решение уравнения $\dot{x}(t) = Ax(t)$, $x(t_0) = x_0$, $t \in [0, \infty)$. Эти методы дали одно и то же решение

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 = e^{A(t-t_0)}x_0,$$

в котором участвует переходная функция Φ от состояния $x(t_0)$ в момент времени t_0 к состоянию $x(t)$. Поскольку рассматривается линейная система, то можно положить $t_0 = 0$, что дает $\Phi(t) = e^{At}$.

Теперь интересно убедиться непосредственной подстановкой решения начальной задачи $x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0$ в исходное уравнение (3.6), что оно ему действительно удовлетворяет. Для этого вначале введем понятие сходимости последовательности матриц.

Определение. Говорят, что последовательность матриц $\{A_k\}$ сходится к матрице A при $k \rightarrow \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N = N(\varepsilon)$, что при $k > N$ норма $\|A - A_k\| < \varepsilon$.

Нормой матрицы A будем называть $\|A\| \triangleq \sum_{i,k=1}^n |a_{ik}|$ или эквивалентную ей норму $\|A\| \triangleq \max_{i,k} |a_{ik}|$, где a_{ik} — элементы матрицы A .

Так как $\|A - A_k\| = \sum_{i,l} |a_{il} - a_{il}^{(k)}|$, то последовательность $\{A_k\}$ сходится тогда и только тогда, когда сходится каждая из последовательностей $\{a_{il}^{(k)}\} \rightarrow \{a_{il}\}$, $i, l = 1, 2, \dots, n$. Ряд $\sum_{k=1}^n A_k$ называется

сходящимся, если сходится последовательность его частичных сумм. Суммой ряда называется предельная матрица частичных

сумм. Ряд $e^A = I + \sum_{k=1}^n \frac{A^k}{k!}$ сходится для любой матрицы A , поскольку

последовательность его частичных сумм является последовательностью Коши (см. подразд. 1.4), т. е. $\exists N(\varepsilon)$, такое, что

$$\|S_n - S_m\| = \left\| \sum_{k=m}^n \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=m}^n \frac{\|A\|^k}{k!} < \varepsilon, \quad m, n > N(\varepsilon),$$

где $\sum_{k=m}^n \frac{\|A\|^k}{k!}$ — отрезок сходящегося числового ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|}$.

◀ Подставим полученное ранее решение $x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0$ в (3.6):

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{e^{A(t+\Delta t-t_0)}x_0 - e^{A(t-t_0)}x_0}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{e^{A(t-t_0)}e^{A\Delta t}x_0 - e^{A(t-t_0)}x_0}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} e^{A(t-t_0)} \frac{e^{A\Delta t} - I}{\Delta t} x_0 = e^{A(t-t_0)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{e^{A\Delta t} - I}{\Delta t} x_0 = \\ &= e^{A(t-t_0)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k (\Delta t)^k}{k!} - I}{\Delta t} x_0 = \\ &= e^{A(t-t_0)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A\Delta t + \frac{A^2 (\Delta t)^2}{2!} + \frac{A^3 (\Delta t)^3}{3!} + \dots}{\Delta t} x_0 = \\ &= e^{A(t-t_0)} Ax_0 = A \underbrace{e^{A(t-t_0)}x_0}_{x(t)} = Ax(t), \end{aligned}$$

т. е. $x(t)$ — решение рассматриваемой начальной задачи. В силу теоремы единственности других решений быть не может. В последней строке матрицы $e^{A(t-t_0)}$ и A коммутативны в силу представления матричной экспоненты в виде матричного ряда, для которого умножение на матрицу A как справа, так и слева приводит к одному и тому же результату. ▶

Подведем некоторые итоги. Решение начальной задачи для дифференциального уравнения с переменными параметрами

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \quad t \in J \in \mathbb{R}, \quad x(t_0) = x_0, \quad A(t), f(t) \in C(J)$$

определяется формулой Коши

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)f(\tau)d\tau,$$

где $\Phi(t, t_0) = X(t)X^{-1}(t_0)$ — переходная матрица состояния, в которой $X(t)$ — фундаментальная матрица решений однородного дифференциального уравнения $\dot{x} = A(t)x$.

В стационарном случае системы $A(t) = A$ ее уравнения имеют традиционный вид (3.1):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, & x(t_0) &= x_0, \\ y &= Cx + Du. \end{aligned}$$

где функция времени $f(t) = Bu(t)$.

Переходная матрица состояния $\Phi(t, t_0)$ принимает форму матричной экспоненты:

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}.$$

Решение для уравнения «вход — состояние» запишется как

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau,$$

а для уравнения «вход — состояние — выход» так:

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t Ce^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du(t).$$

Если положить $t_0 = 0$, то решения принимают более простой вид, в котором $\Phi(t, t_0) = \Phi(t, 0) = \Phi(t) = e^{At}$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \underbrace{e^{At} x_0}_{\text{Состояние при нулевом входе}} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau}_{\text{Состояние при нулевых начальных условиях}}, \\ y(t) &= \underbrace{Ce^{At} x_0}_{\text{Выход при нулевом входе}} + \underbrace{\int_0^t Ce^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du(t)}_{\text{Выход при нулевых начальных условиях}}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Решение (3.12) состоит из двух слагаемых. Первое из них представляет собой *свободное движение системы*, возникающее только за счет начальных условий (при отсутствии входного сигнала). Второе слагаемое соответствует *вынужденному движению систе-*

мы, обусловленному входным воздействием (при этом начальные условия полагаются нулевыми).

Для диагональной реализации, когда матрица $\Lambda = T^{-1}AT$, $\det T \neq 0$ является диагональной, имеем [30]

$$e^{\Lambda t} = \text{diag} \left[e^{\lambda_i(A)t} \right] = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix},$$

где $\lambda_i(A)$ является i -м собственным значением матрицы A .

В этом случае i -я компонента вектора состояния x имеет вид

$$x_i(t) = e^{\lambda_i(t-t_0)} x_i(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\lambda_i(t-\tau)} B_i u(\tau) d\tau,$$

где B_i — i -я строка матрицы B .

Таким образом, компонента x_i развивается независимо от других компонент вектора состояний, но под воздействием всех элементов входного вектора $u(t)$, которые воздействуют на компоненту x_i как линейная комбинация с коэффициентами строки B_i . Говорят, что составляющая $x_i(t)$ соответствует *моду* системы с собственным значением λ_i (от англ. *mode* — форма колебаний).

Если обозначить i -й столбец матрицы C через C_i , то выход приобретет вид

$$y(t) = C_1 x_1(t) + \dots + C_n x_n(t) + Du(t).$$

Полученное выражение показывает, что выход системы является *взвешенной суммой* ее мод.

В общем случае если матрица A диагонализируема, то можно рассматривать преобразование величин в пространстве состояний в виде $\xi = Tx$:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= TAT^{-1}\xi + TBu, \\ y &= CT^{-1}\xi + Du, \end{aligned}$$

где матрица TAT^{-1} диагональная.

Модами системы будут являться компоненты $\xi_i = T_i x$ (где T_i — это i -я строка матрицы T), которые точно являются линейными комбинациями компонент оригинального вектора состояний x . Модам соответствуют собственные значения матрицы A . Обычно мода называется по имени ее собственного значения — мода λ_i .

Матричная весовая функция для (3.12) имеет вид

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ Ce^{At} B + D\delta(t), & t \geq 0, \end{cases}$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция.

Каждый элемент $g_{ij}(t)$ матричной весовой функции $g(t)$ представляет собой реакцию $y_i(t)$ соответствующей компоненты выходного сигнала y на импульсное воздействие со стороны входа $u_j(t) = \delta(t)$ при нулевых начальных условиях.

При нулевом начальном состоянии $x(0) = 0$ выходной сигнал от произвольного входного воздействия $u(t)$, которое равно нулю при $t < 0$, может быть представлен в виде интеграла свертки:

$$y(t) = g(t) * u(t) = \int_0^t g(t - \tau) u(\tau) d\tau = \int_0^t g(\tau) u(t - \tau) d\tau.$$

Представление системы посредством передаточной функции является однозначным представлением и очень полезно для понимания свойств системы в переменных «вход — выход». *Матричная передаточная функция* G может быть определена как преобразование Лапласа от матричной весовой функции:

$$G(s) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-st} dt.$$

Здесь, так же как и при рассмотрении многомерных систем в переменных «вход — выход» в подразд. 2.12, каждый элемент $G_{ij}(s)$ комплексной матричной передаточной функции $G(s)$ представляет собой отношение изображений Лапласа $y_i(s)$ и $u_j(s)$ соответственно выходной и входной переменных $y_i(t)$ и $u_j(t)$:

$$G_{ij}(s) = \frac{y_i(s)}{u_j(s)} = \frac{L[y_i(t)]}{L[u_j(t)]} = \frac{\int_0^{\infty} y_i(t)e^{-st} dt}{\int_0^{\infty} u_j(t)e^{-st} dt}.$$

В области изображений (после применения преобразования Лапласа) уравнения (3.12) принимают вид

$$\begin{aligned} x(s) &= (sI - A)^{-1} x_0 + (sI - A)^{-1} Bu(s), \\ y(s) &= C(sI - A)^{-1} x_0 + \underbrace{[C(sI - A)^{-1} B + D]}_{G(s)} u(s), \end{aligned} \quad (3.13)$$

а *матричная передаточная функция* системы G устанавливает связь между изображениями по Лапласу векторных входного $u(s)$ и выходного $y(s)$ сигналов, т. е.

$$y(s) = G(s)u(s),$$

при $x_0 = 0$:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D = \frac{CA \operatorname{Adj}(sI - A) B + D \det(sI - A)}{\det(sI - A)}. \quad (3.14)$$

Из (3.12) и (3.13) видны полезные соотношения:

$$L \left[\int_0^t C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \right] = L [C e^{At} B * u(t)] = C(sI - A)^{-1} Bu(s).$$

Из (3.14) следует, что $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = D$ в силу того, что каждая полиномиальная компонента присоединенной матрицы $\operatorname{Adj}(sI - A)$ имеет, по крайней мере, на единицу меньший порядок, чем порядок полинома $\det(sI - A)$. Если матрица $D \neq 0$, то передаточная функция $G(s)$ называется *правильной*, если $D = 0$ — *строго правильной*. Полином

$$\det(sI - A) = \prod_{i=1}^n (s - p_i)$$

от переменной s называется *характеристическим полиномом системы*. Нули характеристического полинома системы p_i называются *полюсами* матричной передаточной функции $G(s)$ и совпадают с собственными числами матрицы A , т. е. $p_i = \lambda_i(A)$. Система *асимптотически устойчива*, если собственные числа матрицы A (полюса системы) расположены в левой части комплексной плоскости корней.

Пример 3.6. Пусть задана система с уравнениями состояния

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), u \in \mathbb{R}, \\ y(t) &= [1 \quad 0] x(t), y \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

В примере 3.5 была найдена матрица $(sI - A)^{-1}$ в виде

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix},$$

что дает возможность определить искомую скалярную передаточную функцию:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B =$$

$$\begin{aligned} &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{s}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}. \blacksquare \end{aligned}$$

Частотная матричная передаточная функция. Рассмотрим понятие частотной матричной передаточной функции применительно к линейным системам вида [35]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx.\end{aligned}$$

◀ Пусть на вход системы подается *комплексный* гармонический сигнал

$$u(t) = \alpha e^{j\omega t},$$

где α — некоторый постоянный вектор, а ω — частота колебаний.

Формулы (3.12) с учетом свойств матричной экспоненты дают решение системы в следующем виде:

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{At} x(0) + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau = e^{At} x(0) + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} B\alpha e^{j\omega\tau} d\tau = \\ &= e^{At} x(0) + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} I e^{j\omega\tau} B\alpha d\tau = e^{At} x(0) + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} e^{j\omega\tau} B\alpha d\tau = \\ &= e^{At} x(0) + e^{At} \int_0^t e^{(j\omega I - A)\tau} B\alpha d\tau = \\ &= e^{At} x(0) + e^{At} \left[(j\omega I - A)^{-1} (e^{(j\omega I - A)t} - I) B\alpha \right] = \\ &= e^{At} x(0) + e^{At} (j\omega I - A)^{-1} e^{-At} B\alpha e^{j\omega t} - e^{At} (j\omega I - A)^{-1} B\alpha = \\ &= \underbrace{e^{At} x(0)}_{x^0(t)} - \underbrace{(j\omega I - A)^{-1} e^{At} B\alpha}_{x^*(t)} + \underbrace{(j\omega I - A)^{-1} B\alpha e^{j\omega t}}_{\tilde{x}(t)} = \\ &= x^0(t) + x^*(t) + \tilde{x}(t).\end{aligned}\tag{3.15}$$

Полученное решение состоит из трех компонент:

– переходной составляющей от начального условия

$$x^0(t) = e^{At} x(0);$$

– переходной составляющей от входного воздействия

$$x^*(t) = -(j\omega I - A)^{-1} e^{At} B\alpha;$$

– установившаяся составляющей

$$\tilde{x}(t) = (j\omega I - A)^{-1} B\alpha e^{j\omega t}.$$

Итак, установившийся гармонический процесс вектора состояния имеет вид

$$\tilde{x}(t) = (j\omega I - A)^{-1} Bu(t). \quad (3.16)$$

Предположим, что матрица A — устойчива. Это означает, что собственные значения λ_i матрицы A лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости: $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, $i = 1, \dots, n$. В [35] показано, что для устойчивых матриц $e^{At} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Тогда из (3.15) и (3.16) следует, что $\|x(t) - \tilde{x}(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. В результате для установившегося гармонического выходного процесса имеем

$$\tilde{y}(t) = C\tilde{x}(t) = C(j\omega I - A)^{-1} Bu(t), \quad \|y(t) - \tilde{y}(t)\| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

Таким образом, при действии на вход системы комплексного гармонического сигнала $u(t) = \alpha e^{j\omega t}$ получили связь в частотной области выходного установившегося сигнала $\tilde{y}(t)$ и входного сигнала $u(t)$ в виде

$$\tilde{y}(t) = G(j\omega)u(t), \quad (3.17)$$

где матричная комплекснозначная функция

$$G(j\omega) = C(j\omega I - A)^{-1} B$$

действительного переменного ω называется *частотной матричной передаточной функцией*. ►

Физический смысл выражения (3.17) состоит в следующем.

Пусть все компоненты входного вектора $u(t)$ равны нулю, кроме i -й, которую представим в виде комплексного гармонического сигнала

$$u_i(t) = a e^{j\omega t} = a \cos \omega t + j a \sin \omega t, \quad a, \omega \in \mathbb{R}^+.$$

Тогда k -я компонента установившегося гармонического выходного сигнала равна

$$\tilde{y}_k(t) = |g_{ki}(j\omega)| a \cos(\omega t + \varphi) + j |g_{ki}(j\omega)| a \sin(\omega t + \varphi),$$

где $g_{ki}(j\omega)$ — (k, i) -й элемент матрицы $G(j\omega)$; $\varphi = \arg g_{ki}(j\omega)$.

В силу линейности G отклик системы на сумму вещественной и мнимой составляющих комплексного сигнала $u(t)$ равен сумме откликов на каждую из них. Поэтому если в качестве $u_i(t)$ взять вещественную гармонику $a \cos \omega t$, то установившийся сигнал на k -м выходе будет

$$\tilde{y}_k(t) = |g_{ki}(t)| a \cos(\omega t + \varphi).$$

Таким образом, если на i -й вход системы с *устойчивой* матрицей A подать гармонический сигнал с частотой ω , то на k -м выходе в пределе получается также гармонический сигнал с той же частотой. Его амплитуда в $|g_{ik}(j\omega)|$ раз отличается от амплитуды входного сигнала, т. е. $|g_{ik}(j\omega)|$ имеет смысл *коэффициента усиления* входного гармонического сигнала, а фаза изменяется на величину $\arg g_{ki}(j\omega)$.

3.6. Преобразования подобия

Если в уравнениях линейной модели

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du$$

перейти к новому вектору состояния \bar{x} , сделав подстановку $x = T\bar{x}$, $\det T \neq 0$, то получим

$$T\dot{\bar{x}} = AT\bar{x} + Bu, \quad y = CT\bar{x} + Du,$$

или

$$\dot{\bar{x}} = T^{-1}AT\bar{x} + T^{-1}Bu, \quad y = CT\bar{x} + Du. \quad (3.18)$$

Здесь матрица T называется *преобразующей матрицей* (*матрицей преобразования*). Одновременно она является матрицей перехода от старого базиса в пространстве состояний e к новому базису \bar{e} , что выражается формулой

$$\bar{e} = eT.$$

В матрице T i -й столбец есть координатный столбец нового базисного вектора \bar{e}_i по старому базису $[e_1, e_2, \dots, e_n]$, что можно представить в матричных обозначениях:

$$[\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n] = [e_1, e_2, \dots, e_n]T,$$

где e_i и \bar{e}_i можно считать как некоторые абстрактные базисные векторы или как векторы-столбцы, коэффициенты которых являются координатами этих векторов в некотором другом базисе.

Таким образом, любая невырожденная квадратная матрица является матрицей перехода от одного базиса к другому и одновременно является преобразующей матрицей для системы координат.

Действительно, пусть векторы-столбцы α и β — координаты одного и того же вектора x соответственно в старом и новом базисах. Тогда

$$x = e\alpha = \bar{e}\beta = (eT)\beta = e(T\beta),$$

откуда следует связь координат вектора x в старом и новом базисах:

$$\alpha = T\beta.$$

Обозначив

$$\bar{A} = T^{-1}AT, \bar{B} = T^{-1}B, \bar{C} = CT, \bar{D} = D,$$

получим дифференциальное уравнение в новом базисе:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u, \quad y = \bar{C}\bar{x} + \bar{D}u.$$

Матрицы A и \bar{A} в соотношении $\bar{A} = T^{-1}AT$ называются *подобными*. Это разные матрицы, но они описывают один и тот же линейный оператор в разных системах координат.

Пример 3.7. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= Cx(t) = [1 \quad 0]x(t) \end{aligned}$$

с матрицей преобразования координат

$$T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

На основании (3.18) матрицы системы в новом базисе имеют вид

$$\bar{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 6 \\ -15 & 8 \end{bmatrix},$$

$$\bar{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = CT = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = [2 \quad -1].$$

Уравнения состояния преобразованной системы будут выглядеть так:

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}\bar{u}(t) = \begin{bmatrix} -11 & 6 \\ -15 & 8 \end{bmatrix} \bar{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t),$$

$$\bar{y}(t) = \bar{C}\bar{x}(t) = [2 \quad -1]\bar{x}(t). \quad \blacksquare$$

Определение. Преобразование $x = T\bar{x}$ изменяет внутреннюю структуру модели системы, но не затрагивает соотношение между входом и выходом, т. е. передаточную функцию. Такое преобразование называется **преобразованием подобия**.

Для преобразования подобия существуют инварианты, т. е. характеристики, которые не изменяются для преобразуемой системы при применении к ней преобразования подобия. Для преобразования подобия $\bar{A} = T^{-1}AT$ справедливы следующие четыре инварианта.

1. Собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ матрицы A равны собственным значениям \bar{A} , т. е. характеристические многочлены A и \bar{A} совпадают:

$$\det(sI - A) = \det(sI - \bar{A}) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n),$$

$$\blacktriangleleft \det(sI - \bar{A}) = \det(sT^{-1}IT - T^{-1}AT) = \det T^{-1} \det(sI - A) \det T = \det(sI - A), \text{ поскольку } 1 = \det I = \det(T^{-1}T) = \det T^{-1} \det T. \blacktriangleright$$

2. Определитель матрицы A равен определителю матрицы \bar{A} :

$$\blacktriangleleft \det \bar{A} = \det(T^{-1}AT) = \det T^{-1} \det A \det T = \det A = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n. \blacktriangleright$$

3. След матрицы A (сумма ее диагональных элементов) равен следу матрицы \bar{A} .

◀ След матрицы равен сумме ее собственных значений:

$$\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} \bar{A} = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n. \blacktriangleright$$

4. Матричные передаточные функции в различных базисах равны друг другу:

$$C(sI - A)^{-1}B = \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B}.$$

◀ Матричная передаточная функция для уравнений в новом базисе будет иметь вид

$$\begin{aligned} \bar{W}(s) &= \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} + D = CT(sI - T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}B + D = \\ &= CT(T^{-1}sIT - T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}B + D = CT\left(T^{-1}(sI - A)T\right)^{-1}T^{-1}B + D = \\ &= CTT^{-1}(sI - A)^{-1}TT^{-1}B + D = C(sI - A)^{-1}B + D = W(s). \blacktriangleright \end{aligned}$$

Матрицы A и \bar{A} подобны, и, значит, их характеристические многочлены совпадают (см. инвариант 1). Поэтому преобразование подобия называют *эквивалентным*.

Таким образом, видно, что переход от уравнений в переменных «входы — выходы» к уравнениям в переменных состояния неоднозначен: выполняя различные преобразования, для одной и той же системы можно получать различные значения матриц A , B , C , соответствующие различным базисам векторного пространства состояний. Реализация любой передаточной матрицы не единственна относительно любого невырожденного преобразования.

Свойства преобразования подобия проиллюстрируем примером.

Пример 3.8. Воспользуемся преобразованием подобия из примера 3.7, где матрицы A и \bar{A} имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} -11 & 6 \\ -15 & 8 \end{bmatrix}.$$

Инварианты для матриц A и \bar{A} следующие:

$$1) \det(sI - A) = \begin{vmatrix} s+3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2),$$

$$\det(sI - \bar{A}) = \begin{vmatrix} s+11 & -6 \\ 15 & s-8 \end{vmatrix} = s^2 + 11s - 8s - 88 + 90 = \\ = s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2).$$

Два определителя характеристических матриц равны, следовательно, равны и собственные значения $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$;

$$2) \det A = \det \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = 2, \det \bar{A} = \det \begin{bmatrix} -11 & 6 \\ -15 & 8 \end{bmatrix} = -88 + 90 = 2,$$

т. е. $\det A = \det \bar{A} = \lambda_1 \lambda_2 = (-1)(-2) = 2$, поскольку собственные значения матриц A и \bar{A} равны между собой;

$$3) \operatorname{tr} A = \operatorname{tr} \bar{A} = \lambda_1 + \lambda_2 = -3; \text{ при этом } \operatorname{tr} A = (-3) + 0 = -3, \operatorname{tr} \bar{A} = -11 + 8 = -3;$$

4) пусть даны две системы в исходном и новом базисах в виде

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}\bar{u} = \begin{bmatrix} -11 & 6 \\ -15 & 8 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u, \\ y(t) = Cx = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x, \quad \bar{y} = \bar{C}\bar{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \bar{x}$$

$$\text{с матрицей преобразования } T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для первой системы в примере 3.6 была получена передаточная функция $W(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$.

Найдем передаточную функцию для преобразованной системы с помощью матричного выражения

$$\bar{W}(s) = \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1} \bar{B}.$$

Имеем

$$sI - \bar{A} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -11 & 6 \\ -15 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+11 & -6 \\ 15 & s-8 \end{bmatrix},$$

и, следовательно,

$$\det(sI - \bar{A}) = s^2 + 3s - 88 + 90 = s^2 + 3s + 2.$$

Найдем присоединенную матрицу в виде

$$\text{Adj}(sI - \bar{A}) = \begin{bmatrix} s-8 & 6 \\ -15 & s+11 \end{bmatrix}$$

и с ее помощью получим обратную матрицу:

$$(sI - \bar{A})^{-1} = \frac{\text{Adj}(sI - \bar{A})}{\det(sI - \bar{A})} = \begin{bmatrix} \frac{s-8}{s^2+3s+2} & \frac{6}{s^2+3s+2} \\ \frac{-15}{s^2+3s+2} & \frac{s+11}{s^2+3s+2} \end{bmatrix}.$$

Тогда передаточная функция преобразованной системы запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{W}(s) = \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s-8}{s^2+3s+2} & \frac{6}{s^2+3s+2} \\ \frac{-15}{s^2+3s+2} & \frac{s+11}{s^2+3s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2s-1}{s^2+3s+2} & \frac{-s+1}{s^2+3s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2+3s+2}. \end{aligned}$$

В результате получим ту же самую скалярную передаточную функцию системы, т. е.

$$\bar{W}(s) = W(s). \blacksquare$$

3.7. Структурные схемы и их преобразования

Вначале рассмотрим структурные схемы простейших элементарных звеньев: инерционного звена и дифференцирующего звена с замедлением.

Инерционное звено. Перепишем дифференциальное уравнение апериодического звена (см. подразд. 2.11.4) в форме Коши:

$$\dot{y} = -\frac{1}{T}y + \frac{k}{T}u.$$

Из этого уравнения видно, что производная выходного сигнала \dot{y} , которая может являться входом интегрирующего звена, состоит из

линейной комбинации выходного сигнала $y(t)$ и входного воздействия $u(t)$, как показано на рис. 3.2, а.

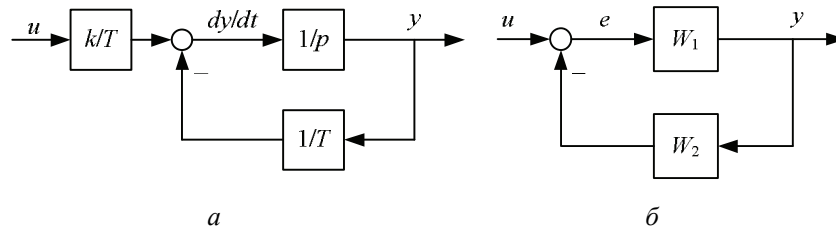


Рис. 3.2. Структурные схемы инерционного звена (а) и общей системы с обратной связью, в которой $y = \frac{W_1}{1 + W_1 W_2} u$ (б)

На рисунке приняты передаточные функции в операторном виде с оператором дифференцирования p , чтобы подчеркнуть преобразование сигналов в реальном времени. Отсюда видно, что инерционное звено может быть получено охватыванием интегратора $1/p$ жесткой отрицательной обратной связью с коэффициентом пропорциональности $1/T$. Этот факт можно проверить, если воспользоваться формулой для передаточной функции W соединения двух динамических звеньев с передаточными функциями W_1 и W_2 , когда звено W_2 включено в отрицательную обратную связь звена W_1 (рис. 3.2, б). Формулу можно получить, пройдя от выхода y против направления прохождения сигналов с учетом преобразования сигналов динамическими звеньями, т. е.

$$y = W_1 e = W_1 (u - W_2 y) = W_1 u - W_1 W_2 y,$$

где e — сигнал ошибки, u — вход инерционного звена, откуда

$$y = \frac{W_1}{1 + W_1 W_2} u = W u,$$

т. е.

$$W = \frac{W_1}{1 + W_1 W_2}. \quad (3.19)$$

Правило. Передаточная функция скалярной системы с **отрицательной** обратной связью равна дроби, в числителе которой стоит передаточная функция прямого канала W_1 , а знаменатель представляет собой сумму единицы и произведения передаточных функций прямого W_1 и обратного W_2 каналов управления.

В случае положительной обратной связи формула (3.19) принимает вид

$$W = \frac{W_1}{1 - W_1 W_2}.$$

На практике обычно встречаются системы с отрицательной обратной связью, для которых передаточная функция определяется по формуле (3.19).

Согласно рис. 3.2, а для инерционного звена

$$W_1 = \frac{1}{p}, \quad W_2 = \frac{1}{T}, \quad W = \frac{k}{T} \frac{\frac{1}{p}}{1 + \frac{1}{p} \frac{1}{T}} = \frac{k}{Tp + 1}.$$

В итоге действительно данное соединение с обратной связью представляет собой передаточную функцию инерционного звена.

Дифференцирующее звено. Уравнение инерционного дифференцирующего звена (см. подразд. 2.11.8)

$$T\dot{y} + y = ku$$

при его интегрировании представляется в виде

$$T \underbrace{y}_{\dot{z}} + \underbrace{\int_0^t y dt}_z = ku.$$

Введя в этом уравнении замену переменных $z = \int_0^t y dt$, $\dot{z} = y$, при-

дем к уравнению инерционного звена

$$\dot{z} = -\frac{1}{T}z + \frac{k}{T}u,$$

структурная схема которого приведена на рис. 3.3, а. Здесь вход интегрирующего звена dz/dt является выходной величиной y

исходного инерционного дифференцирующего звена. Поэтому можно представить структурную схему рис. 3.3, *а* в таком виде, когда пропорциональное звено с единичным коэффициентом усиления с единичным коэффициентом интегрирующей отрицательной обратной связи с коэффициентом $1/T$ (рис. 3.3, *б*).

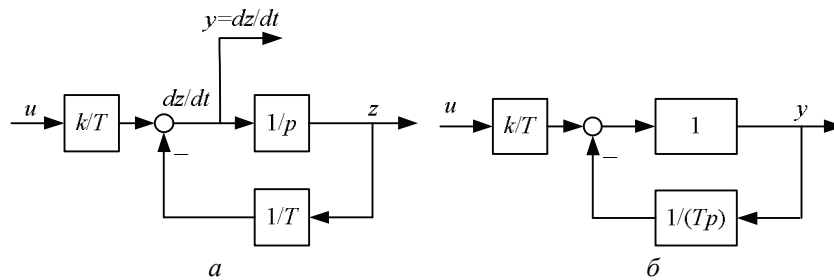


Рис. 3.3. Структурные схемы инерционного дифференцирующего звена

Проверка полученной структурной схемы (см. рис. 3.3, *б*) осуществляется применением передаточной функции звена с обратной связью (3.19) и показывает, что передаточная функция этого звена совпадает с исходной передаточной функцией инерционного дифференцирующего звена:

$$W(p) = \frac{k}{T} \frac{1}{1 + 1 \cdot \frac{1}{Tp}} = \frac{kp}{Tp + 1}.$$

Преобразования структурных схем. Линейные невырожденные преобразования координат в пространстве состояний линейной системы по существу соответствуют обычным методам преобразования структурных схем в теории регулирования. Именно каждому разрешенному (не изменяющему передаточную функцию) структурному преобразованию в теории регулирования соответствует некоторое невырожденное преобразование координат в пространстве состояний системы. Верно и обратное утверждение.

Пример 3.9 [33]. Пусть дана система уравнений двух интегрирующих звеньев, соединенных последовательно (рис. 3.4):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u, \\ y &= x_1\end{aligned}$$

с матрицами (A, B, C) -реализации

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0].$$

Рассмотрим невырожденное преобразование координат $x = T\bar{x}$, заданное матрицей

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, T^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Преобразованные матрицы системы имеют вид

$$\bar{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{C} = CT = [1 \ 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = [0 \ 1],$$

а сама система приобретает следующую форму в другом базисе пространств состояний:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_1 &= \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + u, \\ \dot{\bar{x}}_2 &= \bar{x}_1 - \bar{x}_2, \\ y &= \bar{x}_2.\end{aligned} \quad \blacksquare$$

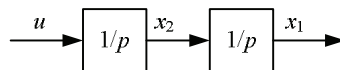


Рис. 3.4. Структурная схема двух интеграторов, соединенных последовательно

Структурная схема преобразованной системы уравнений представлена на рис. 3.5, а. Эта схема методами структурных преобразований может быть сведена к первоначальному виду (см. рис. 3.4), для чего, например, можно использовать передаточную функцию звена, замкнутого отрицательной обратной связью. Схему на рис. 3.5, а можно представить как последовательное соединение двух интегрирующих звеньев, каждое из которых охвачено соответственно положительной и отрицательной локальной обратной связью, а все последовательное соединение имеет главную отрицательную обратную связь. Пользуясь структурным преобразованием, можно последовательно перейти от исходной схемы рис. 3.5, а к двум интегрирующим звеньям (см. рис. 3.4) через схемы рис. 3.5, б–г.

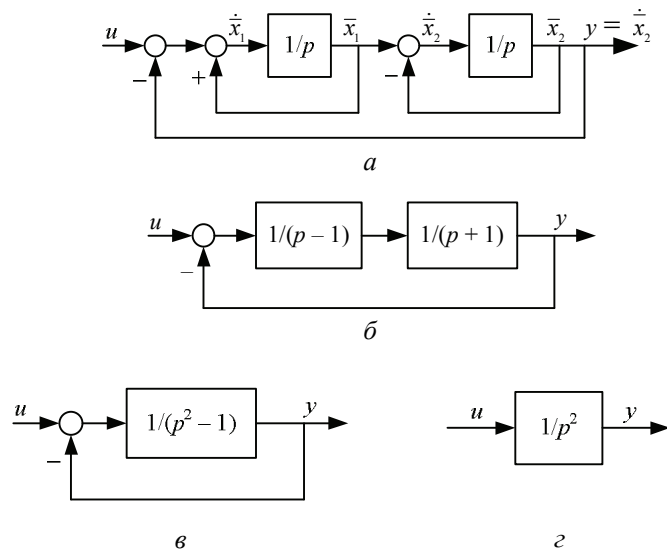


Рис. 3.5. Структурные схемы преобразованных систем

Передаточная функция и переменные состояния. Рассмотрим способ, как по передаточной функции можно получить уравнения в переменных состояния. Пусть дано скалярное уравнение в форме

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) y = (b_1 p^{n-1} + b_2 p^{n-2} + \dots + b_n) u .$$

Разделим левую и правую части данного уравнения на произведение многочленов и введем новую переменную x . Тогда операторные выражения представляются в виде

$$\frac{y}{b_1 p^{n-1} + b_2 p^{n-2} + \dots + b_n} = \frac{u}{p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} = x,$$

что позволяет перейти к следующим двум уравнениям:

$$u = (p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) x, \quad y = (b_1 p^{n-1} + b_2 p^{n-2} + \dots + b_n) x.$$

Введем обозначения

$$x_1 = x, \quad \dot{x}_i = x_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Тогда полученные два дифференциальных уравнения относительно переменных x , y , u можно записать в виде системы уравнений в форме Коши

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ &\dots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n, \\ \dot{x}_n &= -a_1 x_n - a_2 x_{n-1} - \dots - a_n x_1 + u, \\ y &= b_n x_1 + b_{n-1} x_2 + \dots + b_1 x_n, \end{aligned}$$

или более компактно:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n &= u - a_1 x_n - \dots - a_n x_1, \\ y &= b_n x_1 + b_{n-1} x_2 + \dots + b_1 x_n. \end{aligned}$$

Матрицы этой системы имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [b_n, b_{n-1}, \dots, b_1].$$

Полученная матрица A называется *сопровождающей матрицей многочлена*. Она обладает замечательным свойством. Ее характеристический многочлен совпадает с нормированным (с коэффициентом 1 при старшем члене) многочленом n -го порядка, коэффициенты которого расположены в нижней строке этой матрицы с обратными знаками, а именно:

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = \det(\lambda I - A) = \sum_{i=0}^n a_i\lambda^{n-i}, a_0 = 1.$$

По заданному нормированному многочлену сопровождающая матрица строится очень просто. В ее нижней строке располагаются n коэффициентов характеристического многочлена с обратным знаком, элементы, расположенные справа от диагональных, равны единице, а остальные — нули.

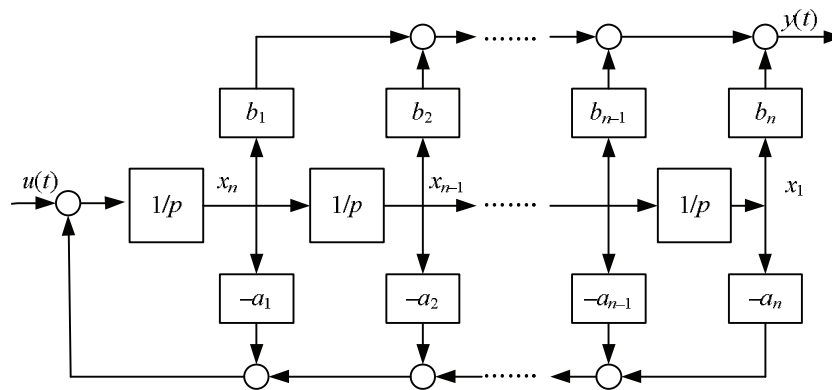


Рис. 3.6. Общая схема моделирования n -мерной управляемой системы с одним входом и одним выходом

На рис. 3.6 показана общая схема моделирования полученной n -мерной управляемой системы с одним входом и одним выходом.

Следует заметить, что любая модель *линейной системы* может быть представлена в виде структурной схемы всего лишь с помощью трех линейных звеньев: *усилительного звена* с коэффициентом усиления k , *интегрирующего звена* $1/p$ и *сумматора*, соединенных соответствующим образом. Иллюстрацией этого положения и является схема на рис. 3.6.

Уравнения состояния при соединении моделей систем [36]. Иногда возникает необходимость в получении уравнения состояния для общего соединения моделей, описываемых в пространстве состояний.

Рассмотрим три возможности такого соединения: 1) независимые подсистемы; 2) последовательное соединение; 3) соединение с обратной связью.

1. Независимые подсистемы.

В этом случае (рис. 3.7) входом объединенной системы S является вектор u , составленный из входных векторов u_1 и u_2 подсистем S_1 и S_2 , т. е. $u = [u_1 \quad u_2]^T \in \mathbb{R}^{m_1+m_2}$, а выходом — объединенный вектор выходов подсистем $y = [y_1 \quad y_2]^T \in \mathbb{R}^{l_1+l_2}$.

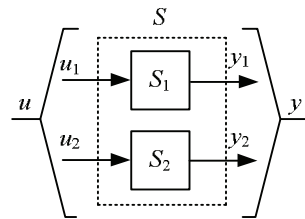


Рис. 3.7. Независимые подсистемы

Пусть подсистемы S_1 и S_2 описываются уравнениями состояния

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \underbrace{A_1}_{n_1 \times n_1} x_1 + \underbrace{B_1}_{n_1 \times m_1} u_1, & y_1 &= \underbrace{C_1}_{l_1 \times n_1} x_1, \\ \dot{x}_2 &= \underbrace{A_2}_{n_2 \times n_2} x_2 + \underbrace{B_2}_{n_2 \times m_2} u_2, & y_2 &= \underbrace{C_2}_{l_2 \times n_2} x_2. \end{aligned}$$

Вектор состояния объединенной системы состоит из векторов x_1 и x_2 : $x = [x_1 \quad x_2]^T$.

Уравнения состояния объединенной системы имеют вид (3.1), где $D = 0$:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx,$$

здесь матрицы A , B , C имеют блочную структуру, т. е.

$$A = \begin{bmatrix} \underbrace{A_1}_{n_1 \times n_1} & \underbrace{0}_{n_1 \times n_2} \\ \underbrace{0}_{n_2 \times n_1} & \underbrace{A_2}_{n_2 \times n_2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \underbrace{B_1}_{n_1 \times m_1} & \underbrace{0}_{n_1 \times m_2} \\ \underbrace{0}_{n_2 \times m_1} & \underbrace{B_2}_{n_2 \times m_2} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \underbrace{C_1}_{l_1 \times n_1} & \underbrace{0}_{l_1 \times n_2} \\ \underbrace{0}_{l_2 \times n_1} & \underbrace{C_2}_{l_2 \times n_2} \end{bmatrix}.$$

2. Последовательное соединение.

Для последовательного соединения подсистем S_1 и S_2 (рис. 3.8) имеем следующие соответствия: $u = u_1$, $y = y_2$, $u_2 = y_1$, $l_1 = m_2$. С учетом данных связей уравнения подсистем записываются так:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \underbrace{A_1}_{n_1 \times n_1} x_1 + \underbrace{B_1}_{n_1 \times m_1} u, & y_1 &= \underbrace{C_1}_{l_1 \times n_1} x_1, \\ \dot{x}_2 &= \underbrace{A_2}_{n_2 \times n_2} x_2 + \underbrace{B_2}_{n_2 \times m_2} \underbrace{C_1}_{l_1 \times n_1} x_1, & y &= \underbrace{C_2}_{l_2 \times n_2} x_2, \end{aligned}$$

что позволяет записать матрицы объединенной системы при $x = [x_1, x_2]^T$ в блочном виде, т. е.

$$A = \begin{bmatrix} \underbrace{A_1}_{n_1 \times n_1} & \underbrace{0}_{n_1 \times n_2} \\ \underbrace{B_2 C_1}_{n_2 \times m_2 \cdot l_1 \times n_1} & \underbrace{A_2}_{n_2 \times n_2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \underbrace{B_1}_{n_1 \times m_1} \\ \underbrace{0}_{n_2 \times m_1} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \underbrace{0}_{l_2 \times n_1} & \underbrace{C_2}_{l_2 \times n_2} \end{bmatrix}.$$

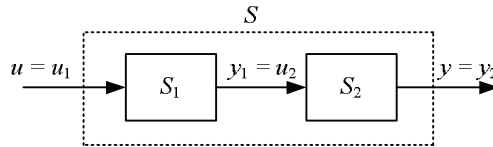


Рис. 3.8. Последовательное соединение

3. Соединение с обратной связью.

Пусть теперь подсистемы соединены по принципу обратной связи, т. е. выход подсистемы S_2 вычитается из входа всей системы S и поступает на вход подсистемы S_1 (рис. 3.9). В качестве выхода общей системы S используется выход подсистемы S_1 . Считается, что $u_1 = u - y_2$, $u_2 = y_1$, $m_1 = l_2$, $m_2 = l_1$, $m = m_1$, $l = l_1$, $n = n_1 + n_2$. Исходя из связей S_1 и S_2 , их уравнения принимают вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \underbrace{A_1}_{n_1 \times n_1} x_1 - \underbrace{B_1}_{n_1 \times m_1} \underbrace{C_2}_{l_2 \times n_2} x_2 + \underbrace{B_1}_{n_1 \times m_1} u, & y_1 &= \underbrace{C_1}_{l_1 \times n_1} x_1, \\ \dot{x}_2 &= \underbrace{A_2}_{n_2 \times n_2} x_2 + \underbrace{B_2}_{n_2 \times m_2} \underbrace{C_1}_{l_1 \times n_1} x_1,\end{aligned}$$

а матрицы в (3.1) определяются выражениями

$$A = \begin{bmatrix} \underbrace{A_1}_{n_1 \times n_1} & \underbrace{-B_1 C_2}_{n_1 \times m_1 \cdot l_2 \times n_2} \\ \underbrace{B_2 C_1}_{n_2 \times m_2 \cdot l_1 \times n_1} & \underbrace{A_2}_{n_2 \times n_2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \underbrace{B_1}_{n_1 \times m_1} \\ \underbrace{0}_{n_2 \times m_1} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \underbrace{C_1}_{l_1 \times n_1} & \underbrace{0}_{l_1 \times n_2} \end{bmatrix}.$$

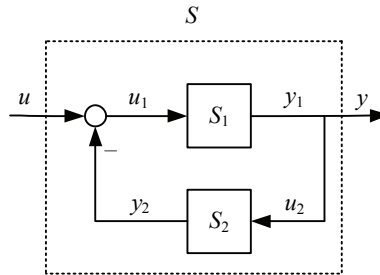


Рис. 3.9. Соединение с обратной связью

3.8. Масштабирование модели объекта

Масштабирование очень важно в практических применениях, поскольку упрощает анализ моделей и проектирование регуляторов (особенно при выборе весовых функций). Масштабирование предполагает, что инженер в начале процесса проектирования системы сделает предположение о требуемом качестве управления. Для этого необходимо определить предполагаемые амплитуды возмущающих и задающих воздействий, допустимую амплитуду каждого входного сигнала, а также допустимую вариацию каждого выхода модели объекта.

Пусть первоначальная, немасштабированная модель объекта в отклонениях задана в виде

$$\hat{y} = \hat{G}\hat{u} + \hat{G}_d\hat{d}, \quad \hat{e} = \hat{y} - \hat{r},$$

где обозначение « $\hat{}$ » используется для того, чтобы показать немасштабированные величины модели; передаточные функции \hat{G} и \hat{G}_d — передаточные функции модели объекта и внешнего возмущения; \hat{u} — входной сигнал; \hat{d} — возмущение; \hat{e} — ошибка регулирования; \hat{y} — выход; \hat{r} — задающее воздействие.

Суть масштабирования состоит в том, чтобы сделать требуемые величины меньше единицы. Это осуществляется посредством деления каждой переменной на ее предполагаемое максимальное значение или максимальное допустимое изменение. Для возмущений и управляемых входов используются следующие масштабированные величины:

$$d = \frac{\hat{d}}{\hat{d}_{\max}}, \quad u = \frac{\hat{u}}{\hat{u}_{\max}},$$

где \hat{d}_{\max} — наибольшее предполагаемое изменение в возмущении; \hat{u}_{\max} — максимально допустимое изменение входа.

Максимальное отклонение от номинальной величины должно быть выбрано с учетом предположения о максимально возможном или допустимом отклонении как функции времени.

Величины \hat{y} , \hat{e} , \hat{r} имеют одно и ту же размерность, поэтому к ним должен быть применен один и тот же масштабирующий коэффициент. Имеются два масштабирующих коэффициента:

\hat{e}_{\max} — наибольшее допустимое значение ошибки управления;
 \hat{r}_{\max} — наибольшее предполагаемое изменение задающего воздействия.

Так как главной задачей управления является минимизация ошибки управления \hat{e} , то целесообразно масштабировать величины \hat{y} , \hat{e} , \hat{r} относительно максимального значения \hat{e} :

$$y = \frac{\hat{y}}{\hat{e}_{\max}}, \quad r = \frac{\hat{r}}{\hat{e}_{\max}}, \quad e = \frac{\hat{e}}{\hat{e}_{\max}}.$$

Формализуем процесс масштабирования, введя масштабирующие множители:

$$D_e = \hat{e}_{\max}, \quad D_u = \hat{u}_{\max}, \quad D_d = \hat{d}_{\max}, \quad D_r = \hat{r}_{\max}.$$

Для многомерных систем класса МИМО переменные в векторных величинах \hat{d} , \hat{r} , \hat{u} , \hat{e} , могут иметь различные максимальные значения. Поэтому масштабирующие коэффициенты становятся диагональными *масштабирующими матрицами* D_e , D_u , D_d , D_r . Это обеспечивает то, что все ошибки (выходы) имеют примерно эквивалентную значимость с точки зрения их амплитуд. Таким образом, соответствующие используемые масштабированные величины для целей управления в общем случае имеют вид

$$d = D_d^{-1}\hat{d}, \quad u = D_u^{-1}\hat{u}, \quad y = D_e^{-1}\hat{y}, \quad e = D_e^{-1}\hat{e}, \quad r = D_e^{-1}\hat{r}.$$

Подставив эти величины в уравнения модели объекта и возмущения, получим

$$D_e y = \hat{G} D_u u + \hat{G}_d D_d d, \quad D_e e = D_e y - D_e r,$$

или, перемножив их на D_e^{-1} слева,

$$y = \underbrace{D_e^{-1}\hat{G}D_u}_G u + \underbrace{D_e^{-1}\hat{G}_d D_d}_{G_d} d.$$

Обозначив масштабированные матричные передаточные функции

$$G = D_e^{-1}\hat{G}D_u, \quad G_d = D_e^{-1}\hat{G}_d D_d,$$

получим модель в безразмерных масштабированных величинах

$$y = Gu + G_d d, \quad e = y - r,$$

структурная схема которой показана на рис. 3.10.

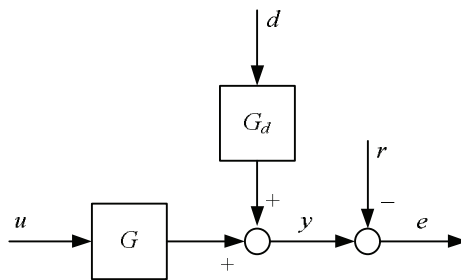


Рис. 3.10. Масштабированные модели объекта и возмущения

Выводы

- Процедура линеаризации системы дифференциальных уравнений, заданных в форме Коши

$$\dot{x} = f(x, u), \quad y(t) = g(x, u),$$

при использовании матриц Якоби $A = \partial f / \partial x$, $B = \partial f / \partial u$, $C = \partial g / \partial x$, $D = \partial g / \partial u$ приводит к линейной системе

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du.$$

- Решение линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad x(t_0) = x_0$$

имеет вид

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0.$$

Здесь применяется переходная матрица состояния

$$\Phi(t, t_0) = X(t)X^{-1}(t_0),$$

где $X(t)$ — фундаментальная матрица решений, столбцы которой состоят из линейно независимых решений однородного дифференциального уравнения.

- Метод вариации произвольной постоянной позволяет вывести формулу Коши для решения неоднородного дифференциального уравнения $\dot{x} = A(t)x + f(t)$:

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)f(\tau)d\tau.$$

- Для стационарной системы

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du$$

формула Коши принимает вид

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t),$$

где ключевую роль играет матричная экспонента e^{At} .

• Матричная экспонента e^{At} может быть получена тремя методами. *Первый метод*: приведение решения $\dot{x} = Ax$ к виду

$$e^{At} = T \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} T^{-1}$$

посредством невырожденного преобразования T для случая различных собственных значений матрицы A . *Второй метод*: отыскание решения $\dot{x} = Ax$ в виде ряда

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} K_i t^i x_0.$$

Третий метод: предельный переход $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(I + \frac{At}{k} \right)^k x_0 = e^{At}$ путем

приближения исходного уравнения в непрерывном времени разностным уравнением в дискретном времени, т. е.

$$x(t+h) = (I + Ah)x(t), \quad x(0) = x_0.$$

• Матричная экспонента e^{At} имеет ряд полезных свойств в решении линейных дифференциальных уравнений:

$$e^{At} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k \frac{A^j t^j}{j!}, \quad e^0 = I, \quad e^{\alpha I} = e^\alpha I, \quad e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1} e^{At_2},$$

$$(e^{At})^{-1} = e^{-At}, \quad A e^{At} = e^{At} A, \quad \frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At},$$

$$\int_0^t e^{A\tau} d\tau = A^{-1}(e^{At} - I), \quad \det A \neq 0$$

• Применение преобразования Лапласа к системе

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du$$

приводит к получению матричной комплексной передаточной функции

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{C \operatorname{Adj}(sI - A)B + D \det(sI - A)}{\det(sI - A)}.$$

• Использование формулы Коши для стационарного случая при комплексном входном воздействии $u(t) = \alpha e^{j\omega t}$ дает решение уравнений $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$ в виде

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + C(j\omega I - A)^{-1}B\alpha e^{j\omega t} - C(j\omega I - A)^{-1}e^{At}Ba,$$

в котором имеется установившаяся составляющая $\tilde{y}(t) = C\tilde{x}(t) = C(j\omega I - A)^{-1}Bu(t)$, поскольку при устойчивой матрице A норма разности $\|y(t) - \tilde{y}(t)\|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0$. Это приводит к матричной частотной передаточной функции

$$G(j\omega) = C(j\omega I - A)^{-1}B,$$

каждая компонента которой $g_{ki}(j\omega)$ устанавливает связь между гармонической компонентой $u_i = a \cos \omega t$ входного воздействия и компонентой установившегося выходного сигнала $\tilde{y}_k(t) = |g_{ki}(j\omega)| a \cos(\omega t + \varphi)$, где $\varphi = \arg g_{ki}(j\omega)$.

• Преобразование подобия $x = T\bar{x}$, $\det T \neq 0$ матрицы A , B , C , D системы $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$ преобразуются к виду:

$$\bar{A} = T^{-1}AT, \bar{B} = T^{-1}B, \bar{C} = CT, \bar{D} = D.$$

Имеется четыре инварианта преобразования подобия: 1) собственные значения; 2) детерминант; 3) след матрицы A ; 4) передаточная функция

$$C(sI - A)^{-1}B + D = \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} + D.$$

Преобразования подобия соответствуют преобразованиям структурных схем.

• Можно перейти от передаточной функции скалярных систем к системе дифференциальных уравнений в пространстве состоя-

ний, содержащей в качестве матрицы A сопровождающую матрицу характеристического многочлена

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}.$$

Характеристический многочлен $\varphi(\lambda)$ сопровождающей матрицы A совпадает с нормированным многочленом n -го порядка, коэффициенты которого расположены в нижней строке этой матрицы с обратными знаками:

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = \det(\lambda I - A) = \sum_{i=0}^n a_i \lambda^{n-i}, \quad a_0 = 1.$$

- Простейшие элементарные звенья — инерционное и инерционное дифференцирующее — могут быть представлены в виде структурных схем, принцип построения которых ведет к получению структурной схемы n -мерной управляемой системы с одним входом и одним выходом. В общем случае любая линейная система может быть представлена структурной схемой, содержащей только усилительные, интегрирующие и суммирующие звенья.

- Выводятся дифференциальные уравнения независимого соединения, последовательного соединения и соединения с обратной связью динамических звеньев s_1 и s_2 в пространстве состояний.

- Сигналы \hat{y} , \hat{u} , \hat{d} , \hat{e} , \hat{r} исходной модели управляемого процесса

$$\hat{y} = \hat{G}\hat{u} + \hat{G}_d\hat{d}, \quad \hat{e} = \hat{y} - \hat{r},$$

могут быть приведены к безразмерному виду y , u , d , e , r масштабированием на единицу по каждой компоненте сигналов с учетом матричных масштабирующих множителей D_d , D_u , D_e

$$d = D_d^{-1}\hat{d}, \quad u = D_u^{-1}\hat{u}, \quad y = D_e^{-1}\hat{y}, \quad e = D_e^{-1}\hat{e}, \quad r = D_e^{-1}\hat{r}.$$

Это приводит к безразмерной модели

$$y = Gu + G_d d, \quad e = y - r.$$

Здесь масштабированные матрицы G , G_d получаются из исходных передаточных матриц \hat{G} , \hat{G}_d следующим образом:

$$G = D_e^{-1} \hat{G} D_u, \quad G_d = D_e^{-1} \hat{G}_d D_d.$$

Масштабирование особо эффективно при проектировании систем управления сложными динамическими объектами класса МИМО.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебном пособии представлены элементы функционального анализа и рассмотрены линейные модели динамических систем в переменных «входы — выходы» и в пространстве состояний. Модели рассмотрены в непрерывном времени.

Изложенный материал является базовым для изучения линейных систем автоматического управления, поскольку знакомит читателя с математическим аппаратом линейных систем и их моделями.

Практическое применение теоретических положений, рассмотренных в пособии, а также численное решение приведенных примеров можно осуществить с помощью использования пакета прикладных программ MATLAB.

Для исследования динамических систем, в частности, предназначен комплект инструментальных средств Toolbox по системам управления [37, 38] в среде MATLAB. Эффективным графическим средством для разработки и моделирования систем является SIMULINK [39, 40]. Для получения навыков разработки систем управления полезно решить цикл примеров, приведенных в пособиях [41–43] и задачниках [29, 44]. Краткое изложение положений теории автоматического управления можно найти в [29, 41, 45].

Все замечания, связанные с неточностями, опечатками, ошибками, а также предложения по содержанию учебного пособия автор примет с благодарностью и просит направлять по электронному адресу yvm@mail.ru.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Теоремы операционного исчисления

В таблице приведены теоремы операционного исчисления, которые были доказаны и использованы в гл. 2 для анализа линейных динамических систем.

Формула	Название теоремы
$L[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha F(s) + \beta G(s)$	Линейность
$L[f'(t)] = sF(s) - f(0)$	Дифференцирование оригинала
$L[p^n f(t)] = s^n f(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} f^{(i-1)}(0)$	n -е дифференцирование оригинала
$L\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s}$	Интегрирование оригинала
$L[f * g] = L[g * f] = F(s)G(s)$	Умножение изображений (интеграл свертки)
$L[e^{at} f(t)] = F(s - a)$	Затухание (произведение оригинала на экспоненту)
$L[f(t - \tau)] = e^{-s\tau} F(s)$	Запаздывание
$L\left[\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}\right] = \frac{\partial F(s, x)}{\partial x}$	Дифференцирование оригинала по параметру
$L[w(t)] = W(s)$	Связь весовой и передаточной функций
$L[h(t)] = \frac{W(s)}{s}$	Связь переходной и передаточной функций

Формулы соответствия

В таблице приведена сводка соответствий между оригиналами и изображениями по Лапласу, полученными в гл. 2 и примененными для решения дифференциальных уравнений динамических звеньев.

Оригинал	Изображение
$\delta(t)$	1
$1(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$
$1 - e^{at}$	$-\frac{a}{s(s-a)}$
$1 - (1-at)e^{at}$	$\frac{a^2}{s(s-a)^2}$
$e^{at} - e^{bt}$	$\frac{a-b}{(s-a)(s-b)}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$
$1 - e^{at} \left(\cos \omega t - \frac{a}{\omega} \sin \omega t \right)$	$\frac{a^2 + \omega^2}{s[(s-a)^2 + \omega^2]}$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Краткая историческая справка

Банах Стефан	1892–1945	Польский математик (пространство Банаха)
Бодэ Хенрик	1905–1982	Американский специалист по автоматическому управлению (диаграмма Бодэ)
Виет Франсуа	1540–1603	Французский математик (теорема Виета)
Ганкель Герман	1839–1873	Немецкий математик (ганкелевы сингулярные числа)
Гильберт Давид	1862–1943	Немецкий математик (пространство Гильберта)
Грам Жорген Педерсен	1850–1916	Датский математик (грамианы управляемости и наблюдаемости)
Дарбу Жан Гастон	1842–1917	Французский математик (суммы Дарбу)
Дирак Поль Адриен Морис	1902–1984	Английский физик (функция Дирака)
Евклид	III в. до н.э.	Древнегреческий математик (евклидово пространство)
Жордан Мари Энмон Камиль	1838–1922	Французский математик (лемма Жордана)
Коши Огюстен Луи	1789–1857	Французский математик (формула Коши, последователь- ность Коши, форма Коши системы обыкновенных дифферен- циальных уравнений)
Кантор Георг	1845–1918	Немецкий математик (теорема Кантора)
Крамэр Габриэль	1704–1752	Швейцарский математик (формулы Крамера)
Кронекер Леопольд	1823–1891	Немецкий математик (теорема Кронекера — Капелли)

Окончание приложения 2

Лаплас Пьер Симон	1749–1827	Французский астроном, математик, физик (преобразование Лапласа)
Липшиц Рудольф	1832–1903	Немецкий математик (условия Липшица)
Лоран Пьер Альфонс	1813–1854	Французский математик (ряд Лорана)
Ляпунов Александр Михайлович	1857–1918	Русский математик и механик (теоремы Ляпунова об устойчиво- сти, устойчивость по Ляпунову)
Лейбниц Готфрид Вильгельм	1646–1716	Немецкий философ, математик, физик, языковед (формула Ньютона — Лейбница)
Найквист Гарри	1889–1976	Американский специалист по авто- матическому управлению (диаграмма Найквиста, критерий устойчивости Найквиста)
Ньютон Исаак	1643–1727	Английский математик, механик, астроном, физик (формула Ньютона — Лейбница)
Паде Анри Эжен	1863–1953	Французский математик (аппроксимация Паде)
Риман Георг Фридрих Бернхард	1826–1866	Немецкий математик (интеграл Римана)
Тейлор Брук	1685–1731	Английский математик (ряды Тейлора)
Фреше Морис Рене	1878–1973	Французский математик (производная Фреше)
Харди Годфри Харольд	1877–1947	Английский математик (пространства Харди)
Хевисайд Оливер	1850–1925	Английский физик (единичная функция Хевисайда)
Эйлер Леонард	1707–1783	Швейцарский математик (формула Эйлера)
Якоби Карл Густав Якоб	1804–1851	Немецкий математик (матрица Якоби)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Система / Большая сов. энцикл. М., 1976. Т. 23. С. 463.
2. *Митришкин Ю.В.* Направления развития современной теории управления (по материалам CDC 2006) // Вестн. МГТУ. Сер. Приборостроение. 2007. № 1. С. 122–125.
3. *Митришкин Ю.В.* Управление динамическими объектами с применением автоматической настройки. М.: Наука, 1985. 158 с.
4. *Mitrishkin Y.V.* Comprehensive Design and Implementation of Plasma Adaptive Self-Oscillations and Robust Control Systems in Thermonuclear Installations // Proceedings of The 8th World Multi-Conference on Systemics, Cybernetics and Informatics, SCI 2004, Orlando, FL, USA. 2004. Vol. XV. Pp. 247–252.
5. *Mitrishkin Y.V., Dokuka V.N., Khayrutdinov R.R.* Linearization of ITER Plasma Equilibrium Model on DINA Code // Proceedings of The 32nd EPS Plasma Physics Conference, Tarragona, Spain, ID P5.080, June 2005.
6. *Green M., Limebeer D.J.N.* Linear Robust Control. Prentice Hall Inc., A Paramount Communications Company / Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1995. 538 p.
7. *Mitrishkin Y.V., Kurachi K., Kimura H.* Plasma Multivariable Robust Control System Design and Simulation for a Thermonuclear Tokamak-Reactor // International Journal of Control. 2003. Vol. 76. No 13. Pp. 1358–1374.
8. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Краткий курс функционального анализа. М.: Высш. шк., 1982. 272 с.
9. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 544 с.
10. *Босс В.* Лекции по математике. Функциональный анализ. М.: Ком-Книга, 2005. Т. 5. 214 с.
11. *Власова Е.А., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н.* Часть II. Элементы функционального анализа и приближенные аналитические методы // Е.А. Власова, В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин. Приближенные методы математической физики М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. С. 135–398.

12. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ: В 2 т. М.: Наука, 1979–1987. Т. 1. 720 с.; Т. 2. 1987. 310 с.
13. Босс В. Лекции по математике. Анализ. М.: Едиториал УРСС, 2004. Т. 1. 214 с.
14. Фельдбаум А.А., Бутковский А.Г. Методы теории автоматического управления. М.: Наука, 1971. 744 с.
15. Стренг Г. Линейная алгебра и ее применения: Пер. с англ. М.: Мир, 1980. 454 с.
16. Винберг Э. Б. Курс алгебры. М.: Фактор пресс, 2001. 544 с.
17. Босс В. Лекции по математике. Линейная алгебра. М.: КомКнига, 2005. Т. 3. 222 с.
18. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 916 с.
19. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Добросвет, 2000. 412 с.
20. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.
21. Агафонов С.А., Герман А.Д., Муратова Т.В. Дифференциальные уравнения / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 244 с.
22. Босс В. Лекции по математике. Дифференциальные уравнения. М.: Едиториал УРСС, 2004. Т. 2. 204 с.
23. Нейман Л.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники. Л.: Энергия, 1975. Т. 1. 522 с.
24. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Линейные системы. Т. 1. М.: Физматлит, 2003. 288 с.
25. Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М.: Наука, 1968. 416 с.
26. Волков И.К., Канатников А.Н. Интегральные преобразования и операционное исчисление / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 228 с.
27. Математические основы теории автоматического управления / В.А. Иванов, В.С. Медведев, Б.К. Чемоданов, А.С. Ющенко; Под ред. Б.К. Чемоданова М.: Высш. шк., 1971. 798 с.
28. Филлипс Ч., Харбор Р. Системы управления с обратной связью: Пер. с англ. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. 616 с.
29. Певзнер Л.Д. Практикум по теории автоматического управления. М.: Высш. шк., 2006. 590 с.

-
30. Glad T., Ljung L. Control Theory – Multivariable and Nonlinear Methods. Printed Bound in Great Britain by MPG Books Ltd., Bodwin, Taylor and Francis, 2000. 468 с.
31. Математическая энциклопедия. М., 1984. Т. 4. С. 189–190.
32. Теория автоматического управления: Ч. 1 / Н.А. Бабаков, А.А. Воронов, А.А. Воронова и др.; Под ред. А.А. Воронова. М.: Высш. шк., 1986. 368 с.
33. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976. 424 с.
34. Kailath T. Linear Systems. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.Y. 07632. 1980. 682 p.
35. Поляк Б.Т., Щербakov П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 304 с.
36. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB. СПб.: Наука, 1999. 274 с.
37. Control System Toolbox 8: User's Guide. The MathWorks Inc., 2007. 410 p. — <http://www.mathworks.com/products/control>.
38. Медведев В.С., Потемкин В.Г. Control System Toolbox. MATLAB 5 для студентов. М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1999. 288 с.
39. SIMULINK 6: Using Simulink. The MathWorks Inc., 2007. 1053 p. — <http://www.mathworks.com/products/simulink>.
40. Дэбни Дж., Харман Т. Simulink 4. Секреты мастерства. М.: БИНОМ/ Лаборатория знаний, 2003. 404 с.
41. Сивцов В.И., Шахназаров Г.А. Практикум по основам теории управления / Под ред. К.А. Пупкова. Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 120 с.
42. Коньков В.Г., Жарков А.И. Иллюстрационно-практические работы по курсам «Управление в технических системах» и «Основы теории управления»: Учеб.-метод. пособие / Под ред. К.А. Пупкова. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. 168 с.
43. Сборник лабораторных работ по курсу «Управление в технических системах» / А.И. Гаврилов, Г.С. Грунина, Н.П. Деменков и др.; Под ред. К.А. Пупкова. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 73 с.
44. Семенов В.В., Пантелеев А.В., Бортаковский А.С. Математическая теория управления в примерах и задачах. М.: Изд-во МАИ, 1997. 262 с.
45. Востриков А.С., Французова Г.А. Теория автоматического регулирования. М.: Высш. шк., 2006. 366 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- | А | З |
|---|---|
| аппроксимация звена запаздывания
инерционными звеньями 135
Паде 136 | значение оператора
регулярное 33
собственное 33 |
| Б | И |
| базис 122 | изображение по Лапласу 73
изоморфизм 22
интеграл
Лапласа 72
неопределенный 43
определенный 45
от абстрактной функции 48
Римана 48 |
| В | Л |
| вектор-функция 74
вычет 75 | лемма Жордана 74
линеаризация
векторного дифференциального
уравнения в форме Коши 151
скалярного дифференциального
уравнения 66 |
| Д | М |
| движение системы
вынужденное 178
свободное 178
декада 92
децибел 92
диаграмма Найквиста 91
дифференциал
произведения двух функций 44
Фреше 41
дифференциальное уравнение
линейное в операторной форме 68
линейное неоднородное с перемен-
ными коэффициентами 157
линейное однородное с переменны-
ми коэффициентами 158
линейное с постоянными коэффици-
ентами 151
нелинейное векторное 152
нелинейное скалярное 64
дифференцируемость по Фреше 40 | масштабирование 200
матрица
Коши 159
преобразующая 185
сопровождающая 197
фундаментальная 158
Якоби 43
матричная экспонента 164
многомерные модели систем |

- в переменных «вход — выход» 139
 передаточная матрица в переменных
 «вход — выход» 141
 множества 36
- Н**
- норма
 в линейном пространстве 23
 линейного оператора 27
- О**
- оператор
 воздействия 68
 дифференцирования 68
 зависящий от параметра 32
 линейный 25
 непрерывный 25
 обратимый 28
 ограниченный 26
 равномерно-непрерывный 25
 резольвентный 33
 собственный 68
 оригинал 72
 отображение. См. оператор
 сжимающее 38
- П**
- передаточная функция
 как оператор 71
 комплексная 79
 матричная 180
 операторная 70
 частотная 91
 частотная матричная 184
- полином
 характеристический 69
- полнос
 функции комплексного переменного
 76
- последовательность
 Коши 19
- предел
 последовательности 16
 функции в точке по Коши 64
- преобразование
 обратной связью 191
- подобия 185
 структурных схем 190
- принцип
 сжимающих отображений 38
 суперпозиции 69
- производная
 свертки 55
 сигнала в точке 64
 сложной функции 42
 Фреше 41
- пространство
 n -мерное евклидово 17
 банахово 24
 линейное векторное 21
 линейное нормированное 23
 линейных операторов 30
 метрическое 16
 непрерывных функций $C[0, 1]$ 18
 нуль-пространство (ядро) 25
 полное 20
 Харди H^∞ 24
- числовая прямая 17
- Р**
- ранг
 матрицы 23
 системы векторов 23
- резольвента 33
- ряд
 Лорана 75
 Неймана 35
 Тейлора 43
- С**
- свертка
 весовой функции и входного сигнала
 85
 двух функций 81
 матричной весовой функции
 и векторного входа 180
 обобщенной функции с основной 54
 физический смысл 87
- сигнал
 векторный 63
 входной 151
 выходной 151

- гармонический 90
система
линейная динамическая 63
целое из частей 7
соединение моделей
независимое 198
последовательное 199
с обратной связью 200
состояние 151
спектр
матрицы 37
оператора 34
суммы
Дарбу 46
сходимость
абсолютная 73
в пространстве $C[0, 1]$ 19
последовательности матриц 176
равномерная 18
- Т**
- теорема
дифференцирования оригинала 77
запаздывания 134
интегрирования оригинала 77
Кронекера — Капелли 143
линейности 76
о возмущении обратного оператора 31
о возмущении регулярного значения 35
о вычетах 75
о дифференцировании оригинала по параметру 173
о линейности обратного оператора 28
о спектральном радиусе 35
о существовании и единственности решения дифференциального уравнения 49
о существовании определенного интеграла 46
об обращении оператора $(I - A)$ 30
обращения 74
умножения изображений 82
тождество Гильберта 34
- У**
- управление спектром матрицы 37
управляемый объект 7
уравнение
характеристическое 69
условие Липшица 49
- Ф**
- формула
Коши 162
Эйлера 93
функция
абстрактная 48
аналитическая 73
весовая 84
Дирака 51, 54
кусочно-непрерывная 72
матричная весовая 180
обобщенная 53
обобщенная регулярная 54
обобщенная сингулярная 54
основная 52
передаточная 70, 79
переходная 87
финитная 52
Хевисайда 87
- Х**
- характеристика частотная
амплитудная (АЧХ) 91
амплитудно-фазовая (АФЧХ) 91
вещественная 92
логарифмическая амплитудная (ЛАЧХ) 92
мнимая 92
фазовая (ФЧХ) 92
- Э**
- элементарное звено
аперiodическое 103
двойное аперiodическое 126
запаздывания 133
идеальное дифференцирующее 109
инерционное дифференцирующее 112

интегрирующее 101	усилительное 101
классификация 99	форсирующее 110
колебательное 115	форсирующее 2-го порядка 111
консервативное 125	цепочка из двух инерционных звеньев
неминимально-фазовое 129	127

ОГЛАВЛЕНИЕ

Список принятых обозначений	3
Предисловие	7
1. Элементы функционального анализа	13
1.1. Термины	13
1.2. Роль функционального анализа в теории управляемых систем	14
1.3. Оператор	14
1.4. Пространства	16
1.5. Линейные операторы в линейных нормированных пространствах	24
1.6. Дифференцирование	40
1.7. Интегрирование	43
1.8. Решение дифференциальных уравнений	49
1.9. Обобщенные функции	51
Выводы	56
2. Линейные модели систем в переменных «вход — выход»	61
2.1. Термины	61
2.2. Понятия скалярных и многомерных систем	62
2.3. Пространства сигналов и систем	63
2.4. Связь между входом и выходом динамической модели	64
2.5. Линеаризация модели в переменных «входы–выходы».....	66
2.6. Операторная передаточная функция	68
2.7. Преобразование Лапласа	71
2.8. Комплексная передаточная функция	78
2.9. Свертка, весовая и переходная функции	81
2.10. Частотные характеристики	90
2.11. Элементарные звенья	99
2.11.1. Классификация	99
2.11.2. Усилительное (пропорциональное) звено	101
2.11.3. Интегрирующее (астатическое) звено	101
2.11.4. Апериодическое (инерционное) звено	103
2.11.5. Идеальное дифференцирующее звено	109
2.11.6. Форсирующее звено 1-го порядка	110
2.11.7. Форсирующее звено 2-го порядка	111
2.11.8. Инерционное дифференцирующее звено	112
2.11.9. Колебательное звено	115
2.11.10. Консервативное звено (осциллятор)	125
2.11.11. Двойное аperiодическое звено	126
2.11.12. Цепочка из двух инерционных звеньев	127

2.11.13. Неминимально-фазовые звенья	129
2.11.14. Звено запаздывания и его аппроксимация	133
2.12. Многомерные линейные модели систем	139
Выводы	145
3. Линейные модели систем в пространстве состояний	150
3.1. Термины	151
3.2. Уравнения модели «вход — состояние — выход»	151
3.3. Линеаризация модели в пространстве состояний	151
3.4. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами	157
3.5. Матричная экспонента в линейных моделях систем	164
3.6. Преобразования подобия	185
3.7. Структурные схемы и их преобразования	190
3.8. Масштабирование модели объекта	200
Выводы	203
Заключение	208
Приложение 1	209
Приложение 2	211
Список литературы	213
Предметный указатель	216

Учебное издание

Митришкин Юрий Владимирович
ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ
УПРАВЛЯЕМЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ
Часть 1

Уравнения «вход — выход» и «вход — состояние — выход»

Редактор *О.М. Королева*
Компьютерная верстка *С.А. Серебряковой*

Оригинал-макет подготовлен в Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана

Подписано в печать 05.09.2008. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Гарнитура «Таймс». Усл. печ. л. 14,0. Уч.-изд. л. 13,25. Тираж 200 экз.
Заказ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
Типография МГТУ им. Н.Э. Баумана
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК